Cours et travaux dirigés
Mécanique du point et du solide



Mohamed BENADDAT

NB : Ce n'est pas le cours principale de la FSR

UNIVERSITE MOHAMED V
FACULTE DES SCIENCES
RABAT-AGDAL
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Sommaire

1 Bases repères et référentiels

Base :

Dans un espace à trois dimensions, on appelle base vectorielle un ensemble de 3 vecteurs linéairement indépendants :

$$\vec{e}_1 \neq a\vec{e}_2 + b\vec{e}_3$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sont non coplanaires

Repères d'espace :

L'ensemble constitué d'un point O de l'espace et de 3 vecteurs de base forme un repère d'espace.

Repère direct :

Le produit vectoriel étant anticommutatif $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$, il est nécessaire de définir une « norme »,un sens « normal ». Le sens direct est obtenu avec la règle de la main droite.

Repère de Copernic :

L'origine correspond : au centre de masse du système solaire
et les axes sont dirigés vers : trois étoiles fixes.

Repère géocentrique :

L'origine correspond :au centre de masse de la terre
et les axes sont dirigés vers : trois étoiles fixes.

Coordonnées :

Pour définir la position de tout point dans un repère, on constate expérimentalement, qu'il est nécessaire et suffisant de prendre trois réels appelés coordonnées.

Repère de temps

Il est constitué d'un instant d'origine et d'une échelle de temps

Référentiel

L'ensemble constitué d'un repère d'espace et d'un repère de temps est appelé référentiel.

Référentiel galiléen :

C'est un référentiel dans lequel l'espace est homogène et isotrope et le temps uniforme.

2 Cinématique du point et du solide

La cinématique est l'étude des mouvements indépendamment des causes qui les produisent.

Pour décrire le mouvement d'un point il est nécessaire d'utiliser des coordonnées. Le choix du système de coordonnées dépendra des caractéristiques du mouvement.
Voici trois systèmes de coordonnées usuels :

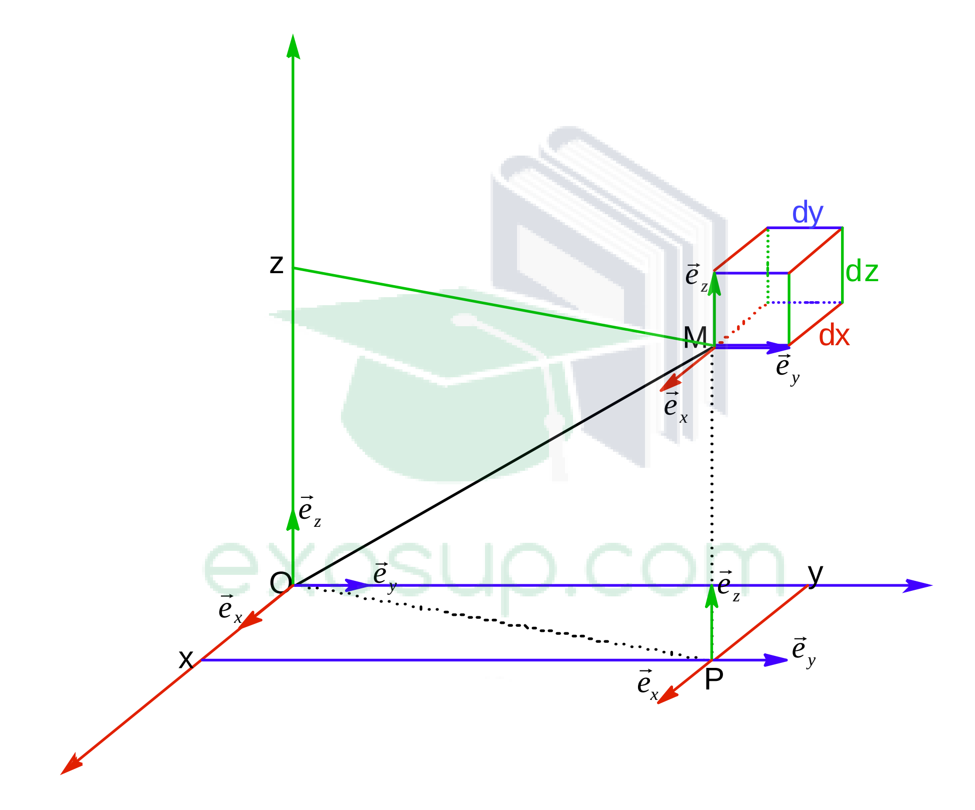
- Coordonnées cartésiennes.
- Coordonnées cylindriques.
- Coordonnées sphériques

2.1 Coordonnées cartésiennes

Coordonnées :

x : abscisse
y : ordonnée
z : côte

Représentation :



Vecteur position :

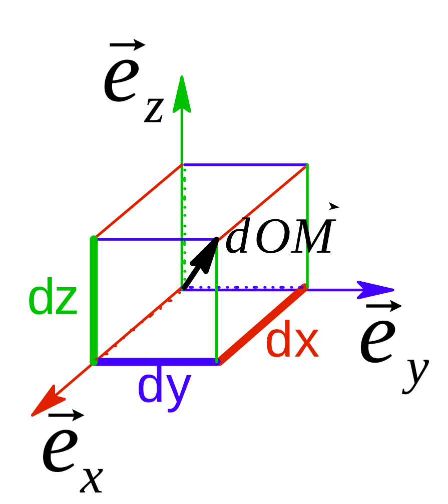
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{dOM} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$$

Volume élémentaire :

$$d^3V = dx \cdot dy \cdot dz$$

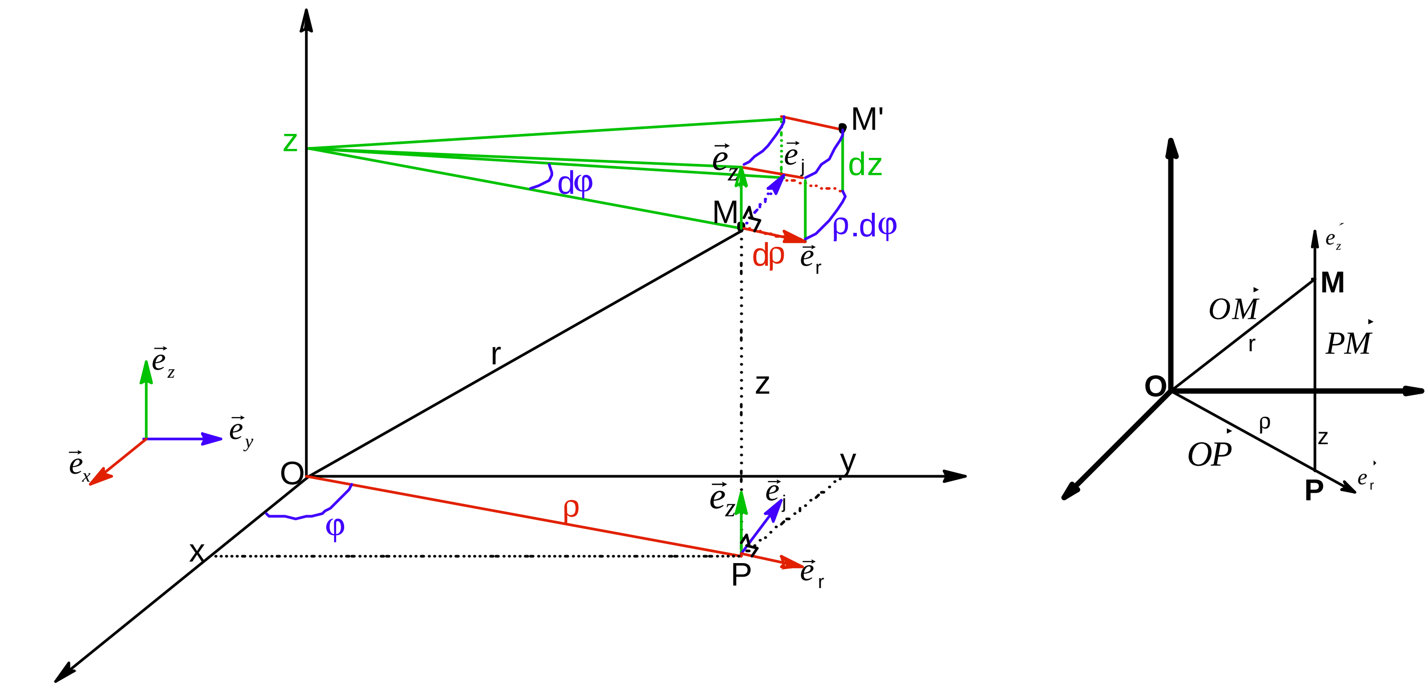


2.2 Coordonnées cylindriques

Coordonnées :

ρ : rayon polaire
φ : angle polaire
z : côte

Représentation :



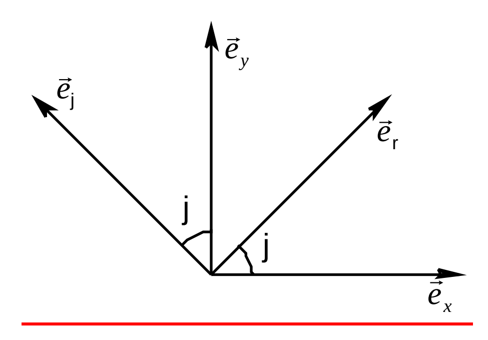
Vecteur position :

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM}$$

$$\vec{OM} = r\,\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

On remarquera que le point M n'a pas de composante selon $\vec{e}_r$.
La base cylindrique est une base mobile donc l'angle j intervient non pas dans la position de M par rapport à la base cylindrique mais dans la position de la base cylindrique par rapport au repère qui est fixe

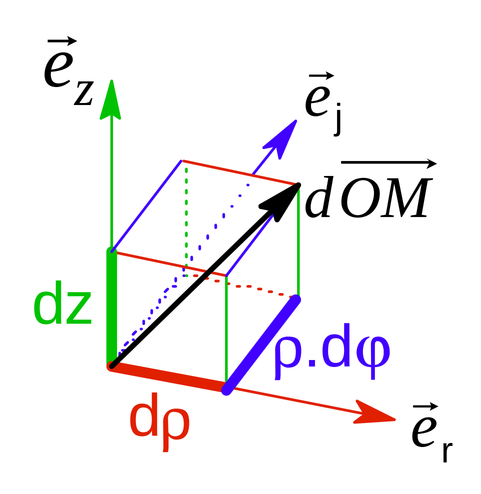
Relation avec les coordonnées cartésiennes :



$$\begin{cases} x = r \cdot \cos j \\ y = r \cdot \sin j \\ z = z \end{cases} \qquad \vec{e}_r \begin{pmatrix} \cos j \\ \sin j \\ 0 \end{pmatrix}_{cart} \qquad \vec{e}_j \begin{pmatrix} -\sin j \\ \cos j \\ 0 \end{pmatrix}_{cart} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \sin j = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Déplacement élémentaire :

$$d\vec{OM} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho\, d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{e}_z$$



Volume élémentaire :

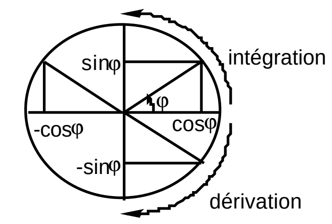
$$d^3V = d\rho \cdot \rho \cdot d\varphi \cdot dz$$

Dérivées des vecteurs par rapport à l'angle φ :

Rappels :

$$\frac{d(\cos\varphi)}{d\varphi} = -\sin\varphi \qquad \frac{d\sin\varphi}{d\varphi} = \cos\varphi$$

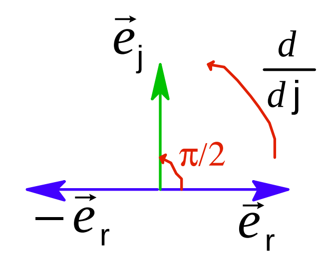
que l'on peut retenir avec :



On déduit des coordonnées des vecteurs :

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi \qquad \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_\rho$$

On remarquera que la dérivation par rapport à φ correspond à une rotation de $\frac{\pi}{2}$:



2.3 Coordonnées sphériques

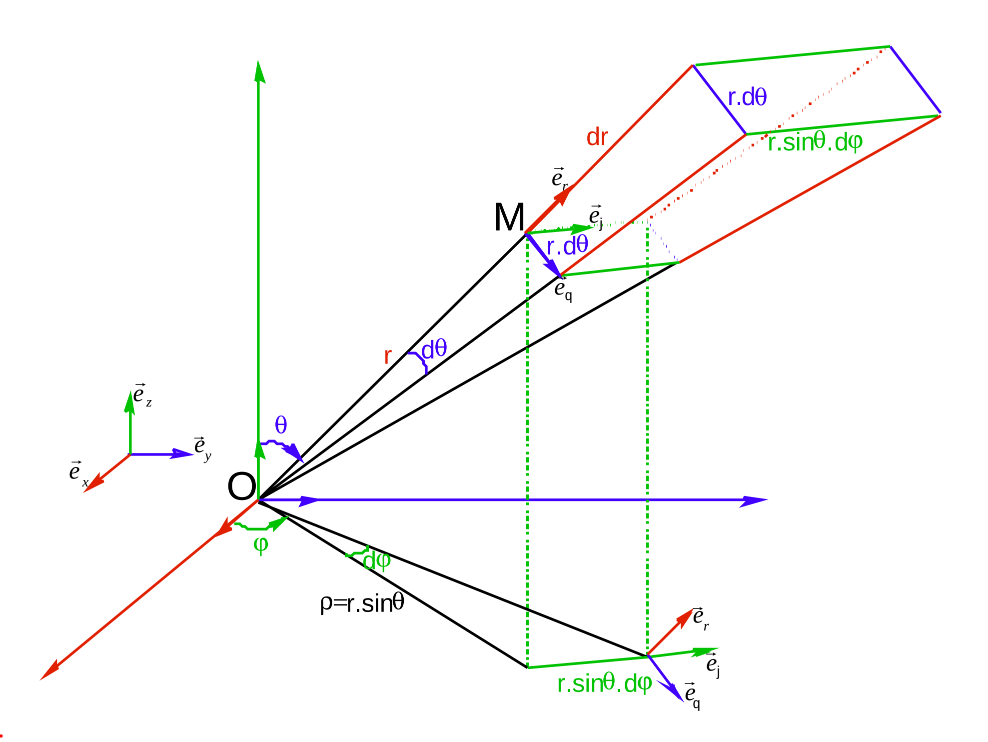
Coordonnées :

r : rayon vecteur — $r \geq 0$

θ : colatitude — $0 \leq \theta \leq \pi$

φ : azimuth — $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Représentation :



Vecteur position :

$$\vec{OM} = r\vec{e}_r$$

Même remarque que pour les coordonnées cylindriques : M n'a qu'une coordonnée car la base sphérique est mobile. Les deux autres coordonnées apparaissent dans le positionnement de la base mobile par rapport à la base fixe.

Relation avec les coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ z = r \cdot \cos\theta \end{cases}$$

Déplacement élémentaire :

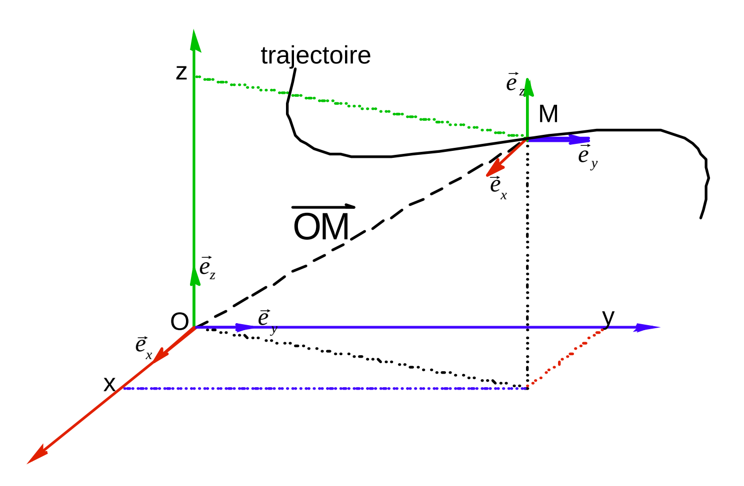
$$d\vec{OM} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\theta \cdot \vec{e}_\theta + r\sin\theta d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

Volume élémentaire :

$$d^3V = dr \cdot r d\theta \cdot r\sin\theta d\varphi$$

2.4 Position d'un point.

Un point M dans un repère R est caractérisé par son vecteur position : $\overrightarrow{OM}$



En coordonnées cartésiennes on note :

$$\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{cart}$$

où $\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}_{cart}$ indique que les coordonnées du vecteur sont celles qu'il a dans la base cartésienne.

La **trajectoire** est l'ensemble des positions occupées par le point M.

L'**équation de la trajectoire** du point M est la relation liant les coordonnées indépendamment du temps.

En coordonnées cartésiennes on notera $f(x, y, z) = 0$

On appelle **équation horaire** l'expression des coordonnées du point en fonction du temps :

$$\begin{cases} x = f_x(t) \\ y = f_y(t) \\ z = f_z(t) \end{cases}$$

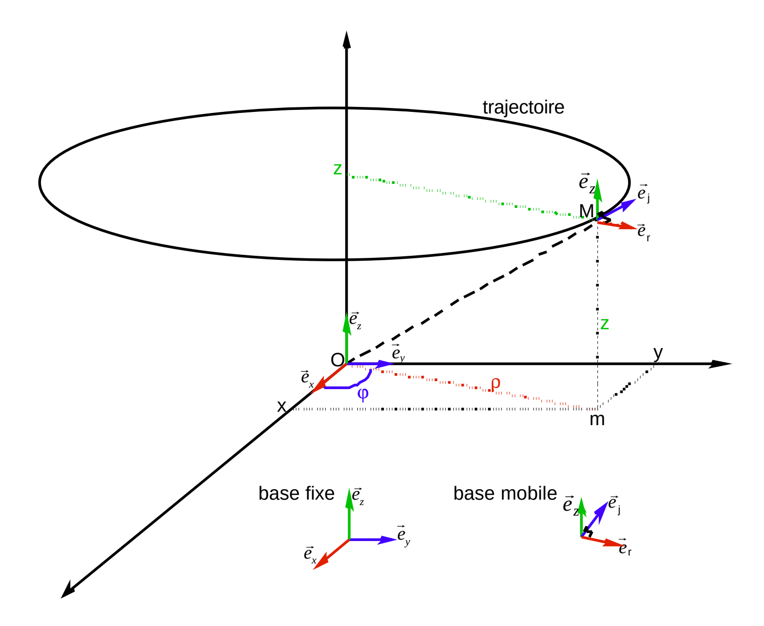
Si le mouvement est **plan**, on choisit le repère de telle sorte que deux coordonnées suffisent. Généralement on conserve les coordonnées x et y.

$$\begin{cases} x = f_x(t) \\ y = f_y(t) \end{cases}$$

Si le mouvement est **rectiligne**, on choisit le repère de telle sorte qu'une seule coordonnée suffise. Généralement on conserve la coordonnée x.

$$x = f_x(t)$$

Lorsque la trajectoire est telle que les expressions et calculs des position, vitesse et accélération sont plus simples en **coordonnées cylindriques** alors on les exprime dans cette **base mobile**.



La base cylindrique étant une base mobile dont l'orientation des vecteurs dépend de la position du point M dans sa trajectoire il n'est pas étonnant de voir que deux coordonnées seulement suffisent à exprimer la position :

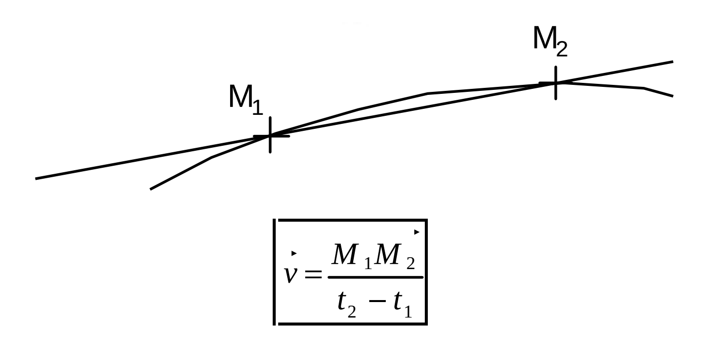
$$\vec{OM} = r \cdot \vec{e_r} + z \cdot \vec{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{OM}\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{cyl}$$

2.5 Vitesse d'un point

La vitesse moyenne d'un point est obtenue en calculant le rapport de la distance parcourue par la durée du parcours :

$$v = \frac{d}{t}$$

Lorsque l'on veut obtenir le vecteur vitesse moyenne entre deux points $M_1(t_1)$ et $M_2(t_2)$ on exprime :



$$\vec{v} = \frac{\vec{M_1M_2}}{t_2 - t_1}$$

Si l'on veut exprimer le vecteur vitesse instantanée en un point M de la trajectoire il faut faire le calcul :

$$\overrightarrow{v_{M/R}} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R$$

Le vecteur exprimé est celui de la vitesse du point M dans son mouvement par rapport au référentiel R. La dérivée du vecteur position se faisant par rapport à ce référentiel.
L'expression du vecteur vitesse dans son mouvement par rapport au référentiel R peut être exprimé dans toute autre base.

En **coordonnées cartésiennes** (<u>base</u> fixe) le mouvement du point M par rapport au **<u>référentiel</u> cartésien** donne le vecteur vitesse :

$$\overrightarrow{v_{M/R}} = \dot{x}\cdot\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\cdot\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\cdot\overrightarrow{e_z} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{v_{M/R}}\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}_{cart}$$

En **coordonnées cylindriques** (<u>base</u> mobile) le mouvement du point M par rapport au **<u>référentiel</u> cartésien** donne le vecteur vitesse :

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{r}\cdot\vec{e}_r + r\,\dot{j}\cdot\vec{e}_j + \dot{z}\cdot\vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \vec{v}_{M/R}\begin{pmatrix}\dot{r}\\ r\,\dot{j}\\ \dot{z}\end{pmatrix}_{cyl}$$

<u>démonstration :</u>

$$\overrightarrow{OM} = r\cdot\overrightarrow{e_r} + z\cdot\overrightarrow{e_z}$$

$$\vec{v}_{M/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d(r\cdot\overrightarrow{e_r} + z\cdot\overrightarrow{e_z})}{dt}\right)_R$$

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{dr}{dt}\cdot\vec{e}_r + r\cdot\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z + z\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt}$$

On a vu que : $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dj} = \vec{e}_j$ donc on peut simplifier

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_r}}{dj}\cdot\frac{dj}{dt} = \dot{j}\,\vec{e}_j \text{ et}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt} = \vec{0} \text{ car } \vec{e}_z \text{ est un vecteur fixe}$$

soit $\vec{v}_{M/R} = \dot{r}\cdot\vec{e}_r + r\,\dot{j}\cdot\vec{e}_j + \dot{z}\cdot\vec{e}_z$

<u>On notera les points suivants :</u>

- L'unité légale de la vitesse est le mètre par seconde $m.s^{-1}$

- Le vecteur vitesse en un point est confondu à la tangente à la trajectoire en ce point.

- Le sens du vecteur vitesse est celui du mouvement.

- Comme pour tout vecteur la norme de la vitesse correspond à la racine carrée de la somme du carré des composantes de ce vecteur.

$$v_{M/R} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

- Il ne faut pas confondre d'une part le référentiel par rapport auquel on étudie le mouvement avec d'autre part la base que l'on choisit pour exprimer le plus facilement les vecteurs position, vitesse ou accélération.

- Dans le cas d'un mouvement de rotation d'axe Oz, on définit le vecteur $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\vec{e}_z$. A l'aide des coordonnées cylindriques exprimons le produit vectoriel $\vec{\omega} \wedge \vec{OM}$. On a $\vec{\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}_{cyl}$ $\vec{OM}\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{cyl}$ donc $\vec{\omega} \wedge \vec{OM} = r\dot{\theta}\,\vec{e}_r$

soit la relation générale : $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}}$

- Le mouvement d'un point M par rapport à un référentiel R_1 de centre O_1 et par rapport à un référentiel R_2 de centre O_2 vérifie la loi de composition des vitesses:

$$\overrightarrow{v_{M/R_1}} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{R_1} \qquad \overrightarrow{v_{M/R_2}} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{R_2}$$

$$\overrightarrow{v_{M/R_1}} = \overrightarrow{v_{M/R_2}} + \overrightarrow{v_{O_2/R_1}} + \overrightarrow{\omega_{R_2/R_1}} \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

où $\overrightarrow{\omega_{R_2/R_1}}$ désigne le vecteur vitesse de rotation du repère R_2 par rapport à R_1

- $\overrightarrow{v_{M/R}}\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{cyl}$ ($\dot{r}$: Vitesse radiale ; $r\dot{\theta}$: Vitesse orthoradiale)

2.6 Accélération d'un point

De même que pour la vitesse on peut définir les vecteurs accélération moyenne et accélération instantanée.

Le vecteur accélération moyenne est obtenu entre deux vecteurs vitesses à des instants t_1 et t_2

$$\vec{a} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1}$$

Le vecteur accélération instantanée correspond à la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps

$$\vec{a}_{M/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{v_{M/R}}}{dt}\right)_R \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{a_{M/R}} = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R$$

Les remarques sur la vitesse concernant la base et le référentiel sont aussi valables pour l'accélération

En **coordonnées cartésiennes** (base fixe) le mouvement du point M par rapport au **référentiel cartésien** donne le vecteur accélération :

$$\vec{a}_{M/R} = \ddot{x}\cdot\vec{e}_x + \ddot{y}\cdot\vec{e}_y + \ddot{z}\cdot\vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{a_{M/R}}\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix}_{cart}$$

En **coordonnées cylindriques** (base mobile) le mouvement du point M par rapport au **référentiel cartésien** donne le vecteur vitesse :

$$\vec{a}_{M/R} = \left[\ddot{r} - r\dot{j}^2\right]\cdot\vec{e}_r + \left[2\dot{r}\dot{j} + r\ddot{j}\right]\cdot\vec{e}_j + \ddot{z}\cdot\vec{e}_z \quad \text{ou} \quad \vec{a}_{M/R}\begin{pmatrix}\ddot{r} - r\dot{j}^2\\ 2\dot{r}\dot{j} + r\ddot{j}\\ \ddot{z}\end{pmatrix}_{cyl}$$

démonstration :

$$\vec{a}_{M/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{v_{M/R}}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d(\dot{r}\cdot\overrightarrow{e_r} + r\dot{j}\cdot\overrightarrow{e_j} + \dot{z}\cdot\overrightarrow{e_z})}{dt}\right)_R$$

$$\vec{a}_{M/R} = \left(\frac{d(\dot{r}\cdot\overrightarrow{e_r})}{dt}\right)_R + \left(\frac{d(r\dot{j}\cdot\overrightarrow{e_j})}{dt}\right)_R + \left(\frac{d(\dot{z}\cdot\overrightarrow{e_z})}{dt}\right)_R$$

$$\vec{a}_{M/R} = \left(\frac{d(\dot{r})}{dt}\right)_R\cdot\vec{e}_r + \dot{r}\cdot\left(\frac{d(\overrightarrow{e_r})}{dt}\right)_R + \left(\frac{d(r)}{dt}\right)_R\cdot\dot{j}\,\vec{e}_j + \left(\frac{d(\dot{j})}{dt}\right)_R\cdot r\,\vec{e}_j + r\dot{j}\cdot\left(\frac{d(\overrightarrow{e_j})}{dt}\right)_R + \left(\frac{d(\dot{z})}{dt}\right)_R\cdot\vec{e}_z + \dot{z}\cdot\left(\frac{d(\overrightarrow{e_z})}{dt}\right)_R$$

On a: $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dj} = \vec{e}_j$ donc $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_r}}{dj}\cdot\frac{dj}{dt} = \dot{j}\,\vec{e}_j$ et $\frac{d\overrightarrow{e_j}}{dj} = -\vec{e}_r$ donc $\frac{d\overrightarrow{e_j}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{e_j}}{dj}\cdot\frac{dj}{dt} = -\dot{j}\,\vec{e}_r$ et $\frac{d\overrightarrow{e_z}}{dt} = \vec{0}$

$$\text{soit } \vec{a}_{M/R} = \ddot{r}\cdot\vec{e}_r + \dot{r}\cdot\dot{j}\,\vec{e}_j + \dot{r}\cdot\dot{j}\,\vec{e}_j + \ddot{j}\cdot r\,\vec{e}_j - r\dot{j}\cdot\dot{j}\,\vec{e}_r + \ddot{z}\cdot\vec{e}_z$$

$$\vec{a}_{M/R} = \ddot{r}\,\vec{e}_r - r\dot{j}^2\vec{e}_r + 2\dot{r}\dot{j}\,\vec{e}_j + r\ddot{j}\,\vec{e}_j + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{a_{M/R}} = \left[\ddot{r} - r\dot{j}^2\right]\overrightarrow{e_r} + \left[2\dot{r}\dot{j} + r\ddot{j}\right]\overrightarrow{e_j} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z} \quad \text{ou} \quad \vec{a}_{M/R} = \left[\ddot{r} - r\dot{j}^2\right]\cdot\vec{e}_r + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{j}\right)\right]\cdot\vec{e}_j + \ddot{z}\cdot\vec{e}_z$$

On notera les points suivants :

- L'unité légale de l'accélération est le mètre par seconde au carré $m.s^{-2}$

- La direction et le sens du vecteur accélération par rapport à sa trajectoire n'est pas aisément exprimable.

- Comme pour tout vecteur la norme de l'accélération correspond à la racine carrée de la somme du carré des composantes de ce vecteur.

$$a_{M/R} = \sqrt{\left[\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right]^2 + \left[2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right]^2 + \ddot{z}^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

- $$\overrightarrow{a_{M/R}} \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \\ \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right) \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{cyl}$$

accélération radiale

accélération orthoradiale

- L'aire d'un arc de cercle d'angle θ vaut $\frac{1}{2}R^2\theta$ et sa dérivée par rapport au temps qui vaut $\frac{1}{2}R^2\dot{\theta}$ s'appelle la vitesse aréolaire. Si le mouvement est tel que l'accélération orthoradiale est nulle alors $\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right) = 0$ et $\rho^2\dot{\varphi}$ est une constante donc le mouvement s'effectue à vitesse aréolaire constante. Cela correspond aux mouvements planétaires.

2.7 Coordonnées intrinsèques. Composantes de Frenet.

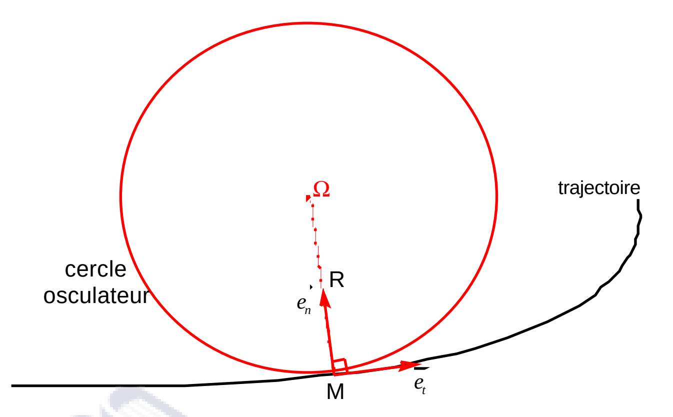
On peut aussi exprimer la vitesse et l'accélération à partir d'une base mobile $(M, \vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_b)$ défini à partir des vecteurs :

$\vec{e}_t$: *Vecteur tangent* à la trajectoire au point M, dans le sens du mouvement

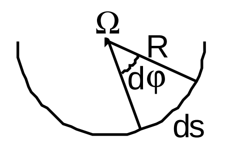
$\vec{e}_n$: *Vecteur normal* à la trajectoire dont la droite d'action passe par le *centre de courbure* • de la trajectoire en ce point

$\vec{e}_b$: *Vecteur binormal* défini à partir des deux précédents par $\vec{e}_b = \vec{e}_t \wedge \vec{e}_n$

On appelle *plan osculateur* •, le plan $(M, \vec{e}_t, \vec{e}_n)$:



Localement on confond la trajectoire avec le *cercle osculateur*.



On défini une *abscisse curviligne* s sur le cercle osculateur qui vérifie $ds = R \cdot d\text{j}$ soit encore :

$$\frac{d\text{j}}{ds} = \frac{1}{R}$$

La vitesse s'exprime par :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{e}_t}$$

et l'accélération s'en déduit :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \vec{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_t + v \cdot \frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

On a déjà vu que $\dfrac{d\vec{e}_r}{d\text{j}} = \vec{e}_\text{j}$ et de même $\dfrac{d\vec{e}_t}{d\text{j}} = \vec{e}_n$ donc $\dfrac{d\vec{e}_t}{dt} = \dfrac{d\vec{e}_t}{d\text{j}} \dfrac{d\text{j}}{dt} = \dfrac{d\text{j}}{dt}\vec{e}_n$

Mais $\dfrac{d\text{j}}{dt}$ n'est pas une grandeur accessible, alors que $\dfrac{d\text{j}}{ds}$ l'est, on écrit donc :

$$\frac{d\text{j}}{dt} = \frac{d\text{j}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} \qquad \text{soit} \qquad \frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{v}{R}\vec{e}_n$$

d'où l'expression :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{e}_t + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{e}_n}$$

accélération tangentielle   accélération normale

2.8 Etude de mouvements.

2.8.1 Types de mouvements

Dans le référentiel considéré.

La trajectoire peut être :

- **rectiligne :** - la trajectoire est une droite,
  - le rayon de courbure est infini et la composante normale de l'accélération est nulle.

- **circulaire :** - la trajectoire est un cercle,
  - la trajectoire est donc plane,
  - le rayon de courbure est constant.

- **curviligne :** - la trajectoire est une courbe.

- **hélicoïdal :** - la trajectoire est une hélice.

Le mouvement peut être :

- **uniforme :** - la valeur algébrique de la vitesse est constante,
  - le vecteur vitesse n'est pas forcément constant,
  - seule la composante tangentielle de l'accélération est nulle.

- **uniformément varié :** - la valeur algébrique de l'accélération tangentielle est constante.

- **accéléré :** - la valeur algébrique de la vitesse augmente,
  - la composante tangentielle de l'accélération est dans le sens du mouvement.

- **ralenti :** - la valeur algébrique de la vitesse diminue,
  - la composante tangentielle de l'accélération est dans le sens contraire du mouvement.

- **sinusoïdal :** - une composante de position dépend sinusoïdalement du temps.

Le mouvement d'un solide peut être :

- **de translation :** - le vecteur vitesse est identique en tout point du solide.

- **de rotation :** - la trajectoire de chaque point du solide est circulaire.

Par exemple la nacelle d'une grande roue a au démarrage un mouvement de translation circulaire uniformément varié

2.8.2 Traiter un exercice de cinématique

Le but est généralement d'exprimer les équations horaires du mouvement pour remonter éventuellement vers l'équation de la trajectoire.

• **Lorsque la nature de la trajectoire est donnée**, il faut en déduire les conditions sur les caractéristiques exprimées dans une base adaptée.

<u>Exemple du mouvement circulaire sinusoïdal</u>

La trajectoire est circulaire on choisit la base cylindrique.
La trajectoire est plane donc la coordonnée z est nulle
La trajectoire est un cercle donc le rayon est une constante (ce n'est pas lui qui dépend sinusoïdalement du temps)
Donc on peut déjà écrire en notant r le rayon du cercle : $\vec{OM} = r\vec{e}_\rho$
On remarque que la base mobile choisie ne permet pas de faire apparaître le caractère sinusoïdal du mouvement
On en déduit l'expression de la vitesse :

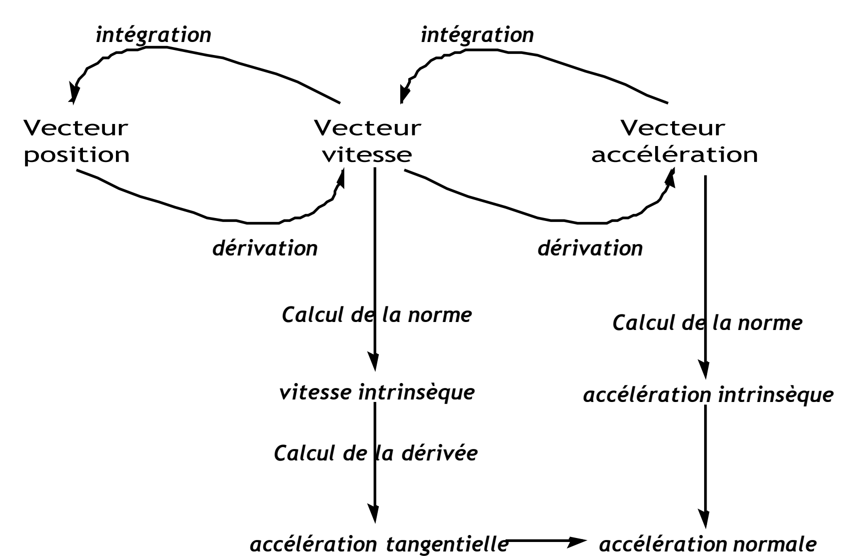
$$\vec{v}_{M/R} = \dot{\rho}\cdot\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi + \dot{z}\cdot\vec{e}_z = r\dot{\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi$$

puis l'expression de l'accélération :

$$\vec{a}_{M/R} = [\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2]\vec{e}_r + [2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}]\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z = -r\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

Le caractère sinusoïdal apparaît dans l'expression de φ : $\varphi = \varphi_{max}\cos(\omega t + \varphi_0)$ où ω désigne la pulsation et φ_0 l'inclinaison initiale.

• **Lorsque l'application des lois de la dynamique** nous fournis les coordonnées de l'accélération, alors il faut remonter par intégration aux caractéristiques de vitesse puis de position. Les constantes d'intégration seront déterminées par les conditions initiales du mouvement.



• Pour les applications numériques, il faut penser avant tout calcul à se placer dans le système d'unités internationales (U.S.I.).

TRAVAUX DIRIGES SUR LA CINEMATIQUE

Exercice 1 : Mouvements rectilignes
Pour chacun des mouvements suivants :

- Mouvement rectiligne uniforme,
- Mouvement rectiligne uniformément varié.

a) Indiquer les conditions sur les caractéristiques.
b) En déduire les vecteurs accélération puis vitesse puis position.

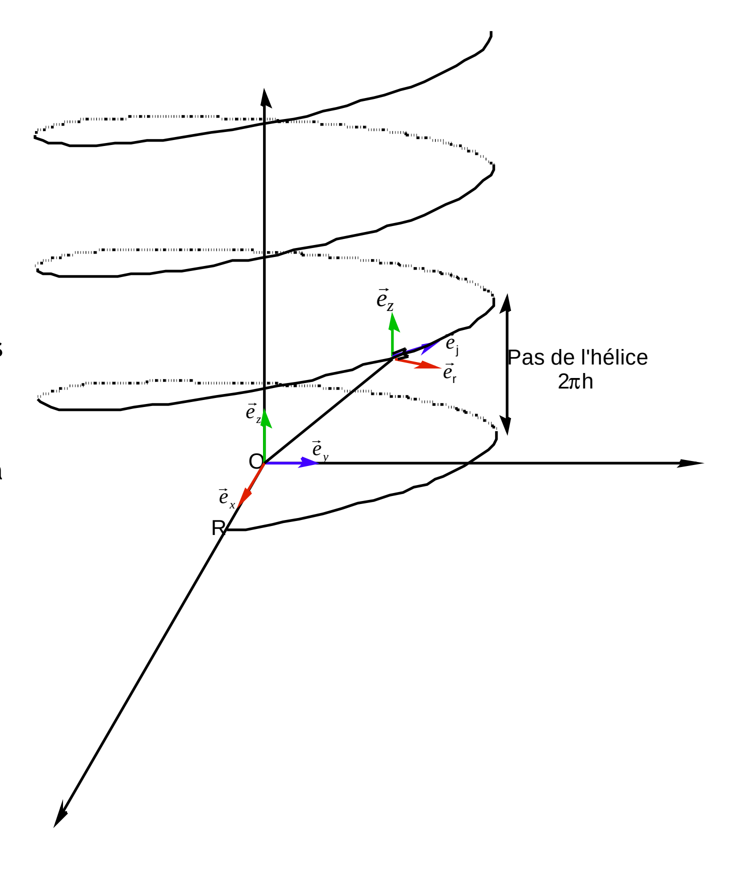
Exercice 2 : La voiture
Une voiture lancée sur une ligne droite à 72 $km.h^{-1}$ s'arrête d'un mouvement uniformément varié sur une distance de 80m.

a) Quelle est la valeur de la décélération ?
b) Combien de temps met-elle pour s'arrêter ?

Exercice 3 : Mouvements circulaires
Pour chacun des mouvements suivants :

- Mouvement circulaire uniforme,
- Mouvement circulaire uniformément varié.

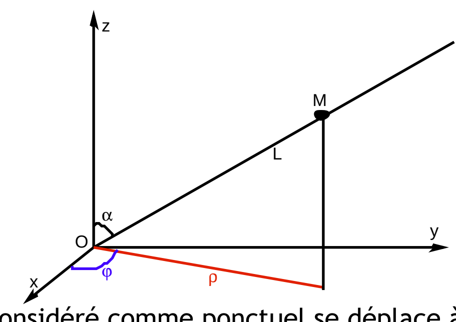
a) Indiquer les conditions sur les caractéristiques.
b) Indiquer la base choisie.
c) En déduire les vecteurs position, vitesse et accélération.



Exercice 4 : Mouvement hélicoïdal uniforme
Le point étudié suit la trajectoire ci-contre :

a) Donner l'expression des coordonnées de position dans les repères cartésiens et cylindriques
b) En déduire les coordonnées de la vitesse ainsi que sa norme.
c) En déduire les coordonnées de l'accélération ainsi que sa norme.
d) Quel est le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 5 : Le projectile



Un mobile considéré comme ponctuel se déplace à la vitesse constante v_0 le long d'une barre de longueur L faisant un angle α constant avec l'axe Oz.
La barre est animée d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz.

a) Indiquer la position du point M dans les différentes bases (cartésiennes, cylindriques, sphériques).
b) En déduire le vecteur vitesse dans la base choisie.
c) Calculer la vitesse d'éjection (α =45°, v_0=10km/h, ω =3tr/min, L=20cm).
d) Exprimer le vecteur accélération.

Exercice 6 : Le catadioptre

Un cycliste descend avec une vitesse constante de 2 $m \cdot s^{-1}$.

a) Donner l'équation horaire du catadioptre situé à la circonférence d'une roue de rayon r=40cm.
b) Exprimer la vitesse et l'accélération en coordonnées intrinsèques.
c) En déduire le rayon de courbure de la trajectoire cycloïdale.

Position du catadioptre à t=0

Exercice 7 cours

a) Redémontrer l'expression de la position, de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cylindriques

Exercice 8 corrigé : Le moteur

Sur une broche de machine est monté un outil de diamètre 200mm.
On ferme l'interrupteur du moteur.
L'outil met 20 secondes pour prendre la vitesse angulaire de régime, égale à 40 $rad.s^{-1}$.
L'outil tourne ensuite d'un mouvement uniforme pendant 60 secondes.
On coupe le courant, l'outil met 40 secondes pour s'arrêter.
On demande pour chacune de ces périodes de déterminer, pour un point de la périphérie de l'outil :

a) L'accélération angulaire et l'accélération tangentielle à la périphérie (on admettra que la période de démarrage et celle de ralentissement sont à accélération constante).

b) L'accélération normale, à la périphérie, en fonction du temps.

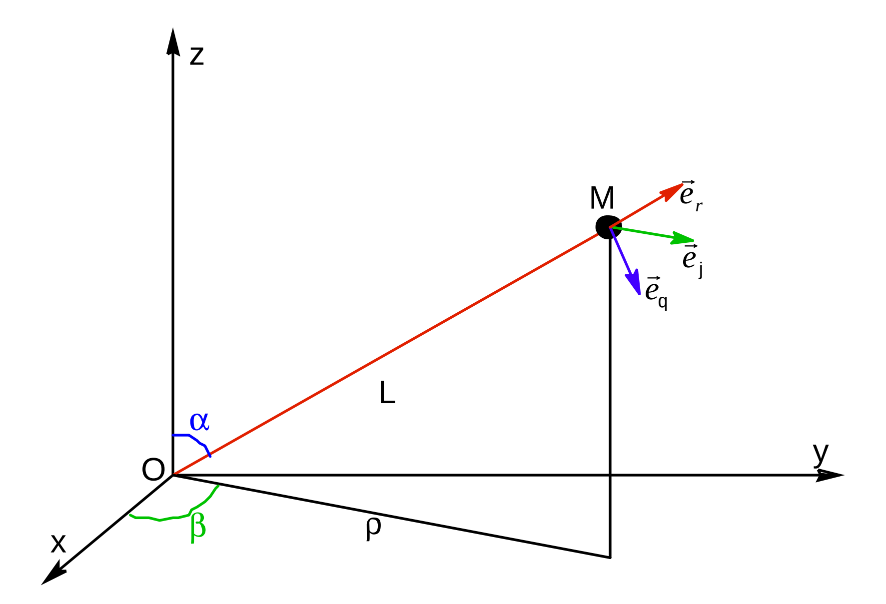
Exercice 9 corrigé : Partiel 2003

Un mobile considéré comme ponctuel est attaché à l'extrémité d'une barre de longueur L, mobile autour du point O.La barre est animée d'un mouvement de rotation complexe tel que :

$$a = At$$

$$b = 3t^2 + t$$

1° Exprimer dans un repère adapté et en vous aidant du formulaire le vecteur vitesse en fonction de A, L et t. En déduire sa norme.
2° Exprimer le vecteur accélération en fonction de A,L et t.



Corrigé de l'exercice 8

Pour traiter ce mouvement circulaire on peut :

- Se placer dans la **base cylindrique** de vecteurs $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ et exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération :

$\vec{OM} = \rho \cdot \vec{e}_\rho$ $\vec{v}_{M/R} = \rho\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi$ $\vec{a}_{M/R} = -\rho\dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho + \rho\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi$ avec $\rho = 100mm$

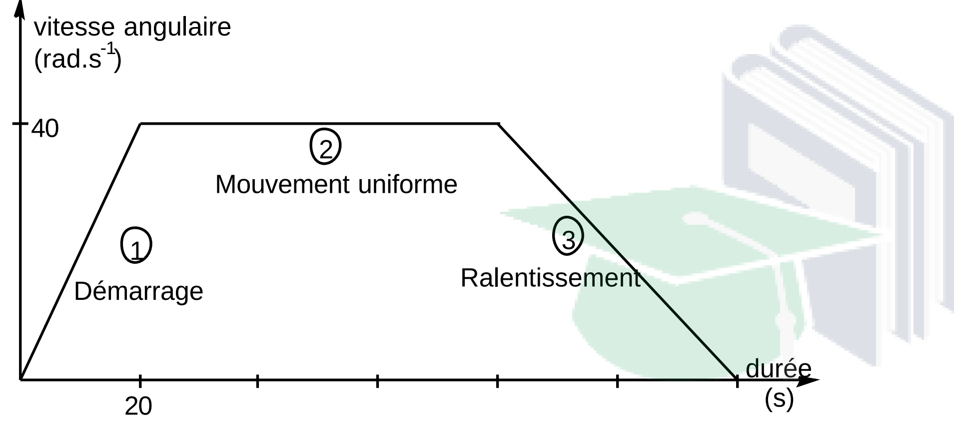
La vitesse angulaire de l'énoncé correspond à : $\omega = \dot{\varphi}$ et l'accélération angulaire à $\gamma = \ddot{\varphi}$

L'accélération tangentielle correspond à la composante selon $\vec{e}_\varphi$: $a_{\tan} = \rho\ddot{\varphi}$ et l'accélération normale à la composante selon $-\vec{e}_\rho$: $a_{normale} = \rho\dot{\varphi}^2$

- se placer dans la **base de Frenet** et en notant le rayon $R = 100mm$ on écrira $\vec{v} = R\omega \cdot \vec{e}_t$ et donc :

l'accélération angulaire à $\gamma = \ddot{\varphi} = \dot{\omega}$ l'accélération tangentielle $a_{\tan} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\dot{\omega} = R\ddot{\varphi}$ et l'accélération normale $a_{normale} = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2 = R\dot{\varphi}^2$

ce qui donnent les mêmes résultats soient :

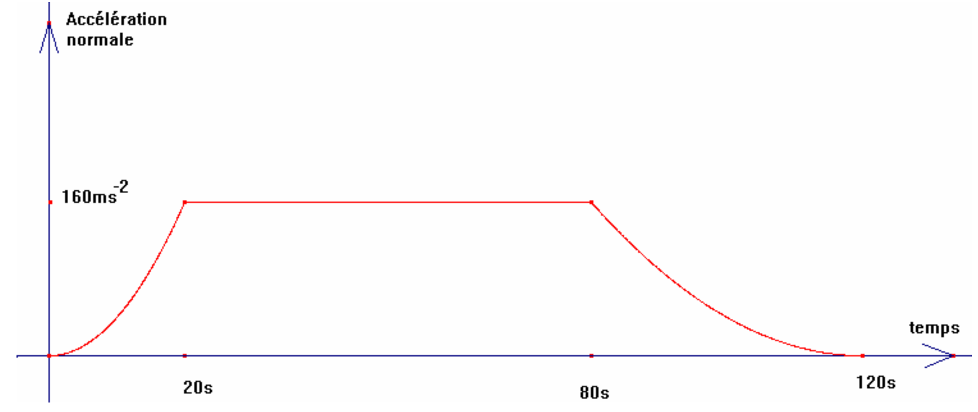


① : $\gamma = \ddot{\varphi} = \frac{40}{20} = 2rad \cdot s^{-2}$, $a_{\tan} = \rho\ddot{\varphi} = 0{,}1 \times 2 = 0{,}2m \cdot s^{-2}$ et donc puisque l'accélération est constante $\dot{\varphi} = 2t$, $a_{normale} = 0{,}1 \times (2t)^2 = 0{,}4t^2$

② $\gamma = \ddot{\varphi} = 0rad \cdot s^{-2}$ $a_{\tan} = 0m \cdot s^{-2}$ $\dot{\varphi} = 40rad \cdot s^{-1}$ $a_{normale} = \rho\dot{\varphi}^2 = 0{,}1 \times 40^2 = 160m \cdot s^{-2}$

③ $\gamma = \ddot{\varphi} = \frac{-40}{40} = -1rad \cdot s^{-2}$, $a_{\tan} = \rho\ddot{\varphi} = -0{,}1 \times 1 = -0{,}1m \cdot s^{-2}$ et donc puisque la décélération est constante

$\dot{\varphi} = 40 + [-1(t-80)] = 120 - t$, $a_{normale} = 0{,}1 \times (120-t)^2 = 0{,}1t^2 - 8t + 1440$



Corrigé de l'exercice 9

On choisi la base sphérique $\left(\vec{e}_r;\vec{e}_\theta;\vec{e}_\varphi\right)$

avec $\vec{OM}\begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{spher}$ avec L constant et on a :

$r = L$; $\alpha = \theta$; $\beta = \varphi$; $\dot{L} = 0$; $\dot{\alpha} = A$; $\ddot{\alpha} = 0$; $\dot{\beta} = 6t + 1$ et $\ddot{\beta} = 6$

$\vec{v}_{M/R}\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r\dot{\varphi}\sin\theta \end{pmatrix}_{spher}$ devient avec les données de l'énoncé $\vec{v}_{M/R}\begin{pmatrix} 0 \\ LA \\ L(6t+1)\sin(At) \end{pmatrix}_{spher}$

d'où la norme : $\left\|\vec{v}_{M/R}\right\| = \sqrt{(LA)^2 + \left(L(6t+1)\sin(At)\right)^2}$

$v_{M/R} = L\sqrt{A^2 + (6t+1)^2\sin^2(At)}$

et l'accélération :

$$\vec{a}_{M/R}\begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \\ 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta \end{pmatrix}_{spher}$$

devient avec les données de l'énoncé

$$\vec{a}_{M/R}\begin{pmatrix} -LA^2 - L(6t+1)^2\sin^2(At) \\ -L(6t+1)^2\sin(At)\cos(At) \\ 2LA(6t+1)\cos(At) + 6L\sin(At) \end{pmatrix}_{spher}$$

3 Notions de forces et d'équilibre

Toute action mécanique s'exerçant sur un objet a pour effet soit :
- de modifier son mouvement ou de le mettre en mouvement,
- de le maintenir en équilibre,
- de le déformer.

Toute action mécanique peut être décrite par une somme d'actions élémentaires.

Toute action mécanique élémentaire s'exerçant sur un corps peut être décrite par la connaissance des quatre caractéristiques suivantes :
- le point d'application,
- la droite d'action,
- le sens,
- la valeur : son intensité.

Ces quatre caractéristiques sont celles d'un vecteur lié.
La connaissance de ces quatre caractéristiques permet de construire une grandeur vectorielle nommée **force**.

La connaissance de l'ensemble de ces caractéristiques représentant l'ensemble des actions élémentaires permettra de décrire le solide à n'importe quel instant. C'est dans cette **hypothèse déterministe** que nous nous placerons dans l'ensemble de ce cours.

Il est important de noter qu'une action sur un solide le mettant ou modifiant son mouvement peut être décrite par un ensemble de forces mais que la simple connaissance de la somme de ces forces (somme vectorielle) n'est pas suffisante pour en décrire le mouvement.

Il est alors nécessaire de connaître une grandeur supplémentaire :
Le moment total des forces (somme vectorielle des moments des forces) s'exerçant sur le solide.

En effet une somme de forces nulle peut très bien mettre en mouvement un solide.

Pour être complet dans la connaissance d'une action il faudra donc connaître deux grandeurs :
- la somme vectorielle des forces s'exerçant sur le solide.
- la somme vectorielle des moments des forces s'exerçant sur le solide.

On retiendra donc que pour décrire le mouvement d'un solide dans l'espace, il nous faudra connaître le couple suivant : [Somme des forces, Somme des moments des forces] nommé **Torseur force** et noté [F].

Ainsi les équations de la dynamique exprimées sur les forces et sur les moments pourront être ramenées à des équations torsorielles.

A chaque action élémentaire, on associera un torseur composé du vecteur force et de son moment.

Il est à noter que le moment permet de décrire la mise en rotation d'un solide. C'est pourquoi pour une première approche de la dynamique si on se limite à l'étude d'un point ou du centre d'inertie d'un solide l'utilisation des torseurs est inutile et la seule connaissance des vecteurs forces suffit, laissant de côté la notion de moment. Mais dans l'étude de la mécanique du point, il ne faut pas oublier que l'on perd une partie de la généralité.

3.1 Le torseur force

3.1.1 Les forces

Les forces peuvent être regroupées en trois familles :
- Les forces de champ : force de gravitation, force de Lorentz.
- Les forces de contact : force de frottement,… .
- Les forces nucléaires assurant la cohésion du noyau atomique.

Les forces s'expriment en Newton noté N

Le poids qui appartient à la première famille est défini par les caractéristiques suivantes :
- Point d'application : le centre d'inertie du solide
- Droite d'action : la verticale
- Sens : Vers le bas
- Valeur : P=mg avec m masse en kg du solide et g=9,81N/kg sur terre

Dans le cas des forces de contact le point d'application correspond au point de contact.

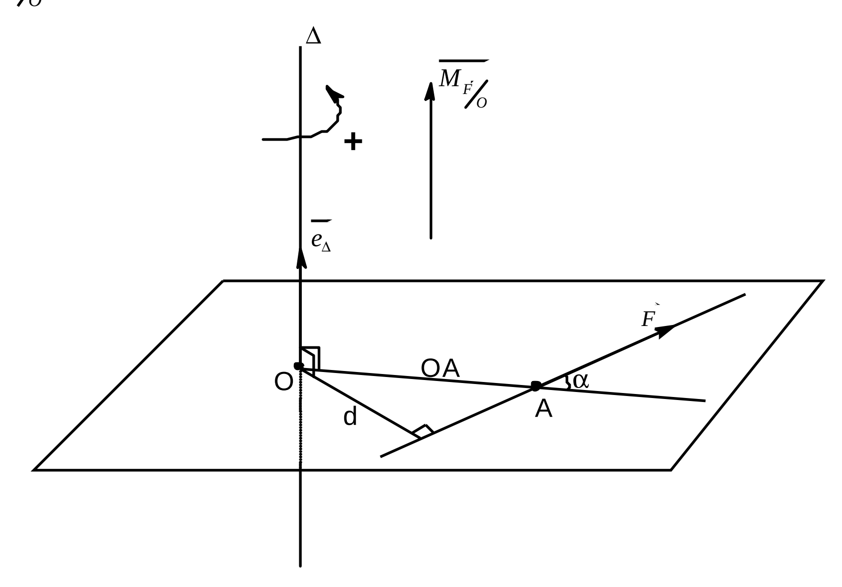
3.1.2 Moment de forces

Le moment total des forces est la grandeur qui va nous permettre de savoir si l'action aura pour effet la mise en rotation du solide.

Il s'exprime en un point O quelconque et pour une force $\vec{F}$ ayant A comme point d'application par :

$$\vec{M}_{\vec{F}/O} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

Le moment est un vecteur libre.



Il est indépendant de la position de A sur la droite d'action.
Norme du moment :

$$\left\|\vec{M}_{\vec{F}/O}\right\| = OA \times \left\|\vec{F}\right\| \times \sin\alpha = d \times \left\|\vec{F}\right\|$$

Pour des raisons de simplification, si le solide est en rotation autour d'un axe, on préférera généralement exprimer le moment par rapport à cet axe. Avec O passant par l'axe de rotation Δ on a :

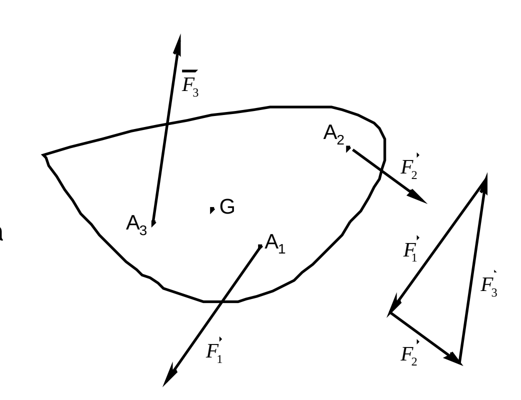
$$M_{\vec{F}/\Delta} = \vec{M}_{\vec{F}/O} \cdot \vec{e}_\Delta$$

$M_{\vec{F}/\Delta}$ est la projection de $\vec{M}_{\vec{F}/O}$ sur l'axe Δ de vecteur directeur $\vec{e}_\Delta$.Le scalaire $M_{\vec{F}/\Delta}$ est indépendant du choix de O sur l'axe Δ.

Se choisir un vecteur $\vec{e}_\Delta$ c'est choisir un sens positif pour la rotation autour de l'axe Δ. Le signe du moment par rapport à l'axe est donc positif si la rotation du vecteur $\vec{F}$ autour de Δ se fait dans le sens positif choisi.

3.2 Equilibre, rotation et translation

3.2.1 Equilibre



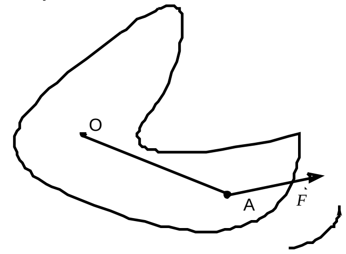
Tout mouvement d'un solide dans l'espace peut être décomposé en :
- un mouvement de translation et
- un mouvement de rotation.

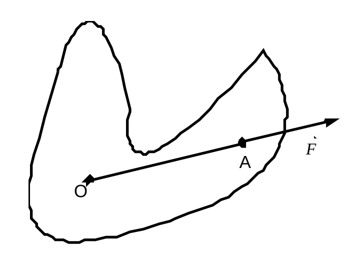
La connaissance de la somme des forces s'exerçant sur un solide renseignera sur la modification de son mouvement de translation.

Ce vecteur indiquant le sens et la direction du mouvement. L'absence de translation se traduisant par une somme de forces nulle.

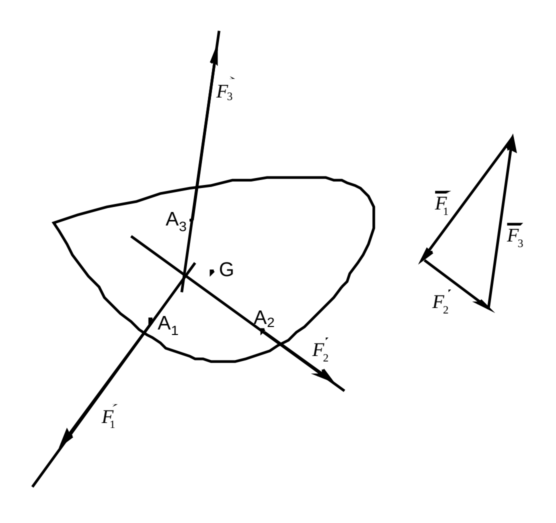
La connaissance de la somme des moments des forces s'exerçant sur un solide renseignera sur la modification de son mouvement de rotation.

En effet toute force $\vec{F}$ ayant A comme point d'application s'appliquant sur un solide dont l'axe de rotation passe par le point O mettra ce solide en rotation autour de son axe tant que le vecteur $\vec{OA}$ ne sera pas colinéaire au vecteur force $\vec{F}$. La rotation s'arrêtant quand les vecteurs sont colinéaires soit le produit vectoriel nul.





Un solide ne pourra être maintenu dans son état d'équilibre que s'il n'est mis ni en translation ni en rotation.



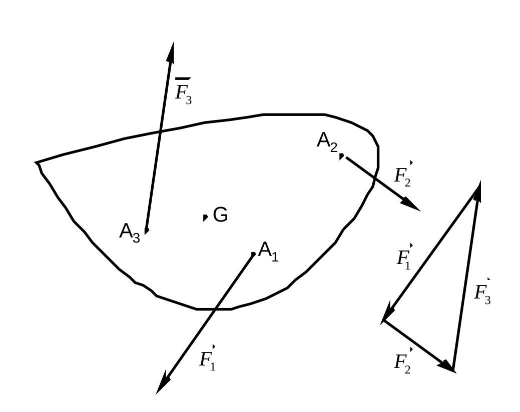
Cela se traduit mathématiquement par :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \text{ et } \sum \vec{M_O} = \vec{0}$$

ou plus synthétiquement par le torseur force [F] :

$$[F] = 0$$

3.2.2 Couple et mouvement de rotation



Un solide dont la somme des forces est nulle mais le moment total non nul est soumis à un **couple.**

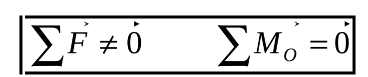
$$\sum \vec{F} = \vec{0} \qquad \sum \vec{M_O} \neq \vec{0}$$

Un couple est une action qui met le solide uniquement en rotation.

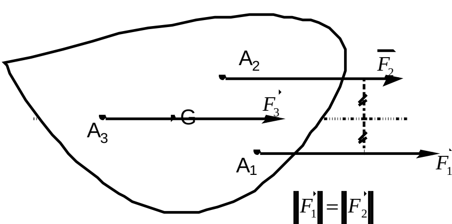
Un solide initialement en translation et soumis à un couple restera en translation mais subira en plus un mouvement de rotation

3.2.3 Translation

La modification du mouvement d'un solide, soumis à un ensemble de forces non nulles mais de moment total nul, sera une **translation.**



$$\sum \vec{F} \neq \vec{0} \qquad \sum \vec{M_O} = \vec{0}$$



Un solide initialement en rotation et soumis à une somme de force non nulle mais de moment total nul restera en rotation mais subira en plus un mouvement de translation.

3.3 Forces de frottement

Réaction du support et force de frottement sont généralement inclues dans une même force notée $\vec{R}$. Le torseur $\lfloor \vec{R} \rfloor$ se décompose donc en :

$\vec{R_N}$: Réaction normale

$\vec{M}_{R_N/O}$: Moment de résistance au pivotement

$\vec{R_T}$: Réaction tangentielle = force de frottement

$\vec{M}_{R_T/O}$: Moment de résistance au roulement

3.3.1 Frottement statique

Quand le solide est immobile du fait des frottements on peut définir un facteur de frottement statique μ_S.
μ_s est défini à partir de la valeur maximale que peut prendre la composante tangentielle sans qu'il y ait de mouvement.

On a donc $R_{T\max} = \mu_s \cdot R_N$

et donc quand le solide est immobile : $R_T \leq \mu_s \cdot R_N$

On peut aussi utiliser l'angle de frottement statique et le cône de frottement pour mieux visualiser la limite à partir de laquelle le solide va glisser.

A partir du moment où $\vec{R_T}$ est supérieur à $\mu_s \cdot R_N$, le solide se met en mouvement et il faut utiliser le facteur de frottement dynamique μ_D.

3.3.2 Frottement dynamique

Le facteur de frottement dynamique μ_D qui comme μ_S est une grandeur tabulée qui dépend de la nature du contact, permet d'exprimer la composante tangentielle en fonction de la composante normale :

$$R_T = \mu_D \cdot R_N$$

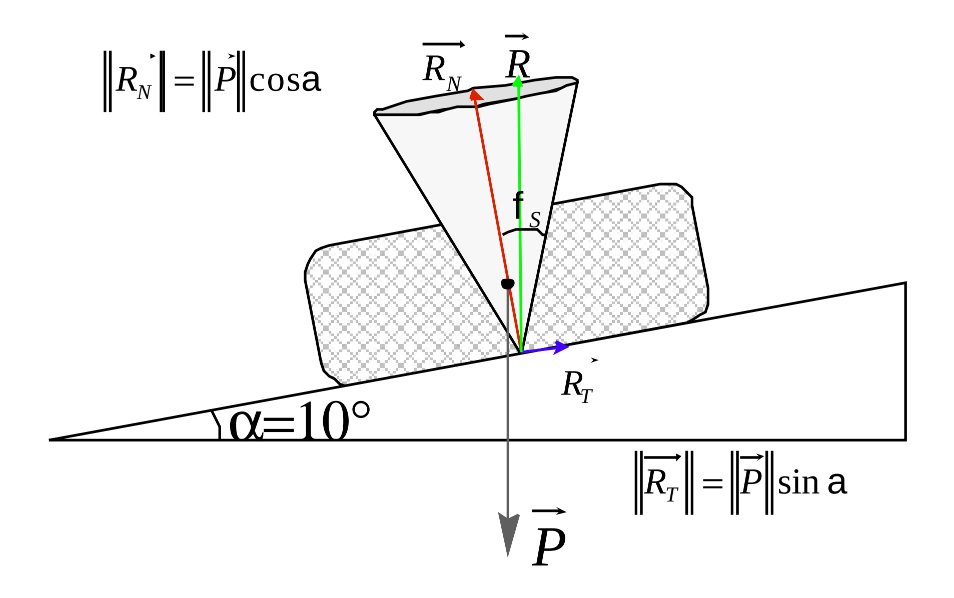
La valeur de μ_D est obligatoirement inférieure à μ_S

Exemple : Solide sur un plan incliné

Prenons un solide de poids P=100N posé sur un plan incliné d'un angle α.
Le solide est en équilibre si les deux forces $\vec{P}$ et $\vec{R}$ sont égales et opposées.
On suppose $\mu_S = 0,4$ et $\mu_D = 0,3$. $\varphi_S = \arctan(0,4) = 21,8°$

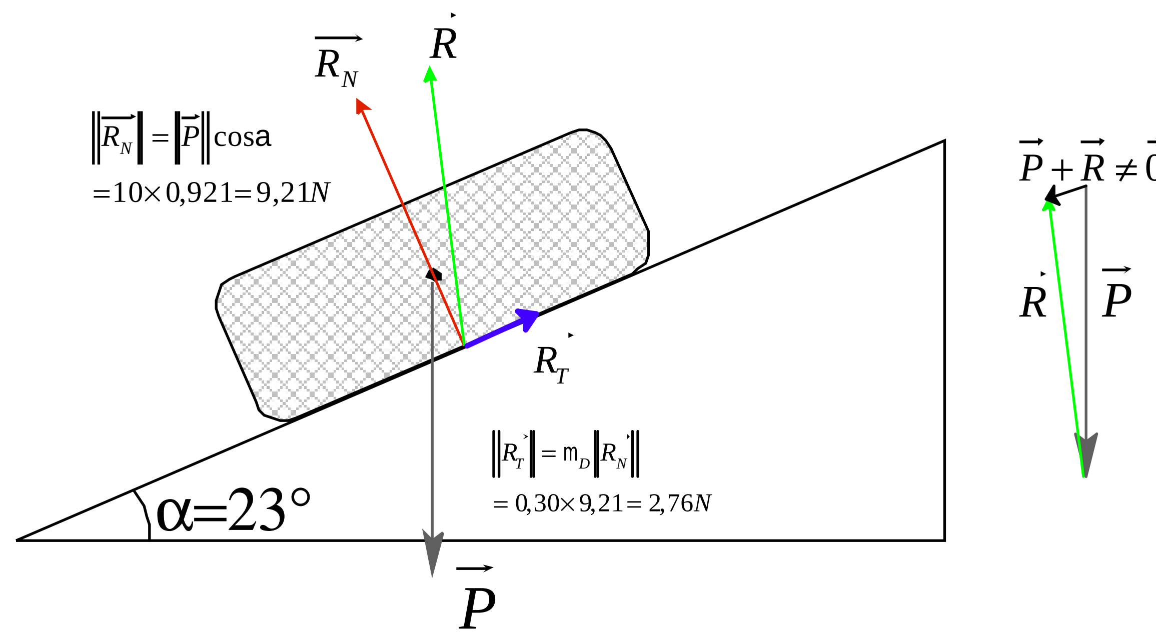
Tant que la pente est d'angle $\alpha \le \varphi_S$:

La réaction vaut $R_N = P\cos\alpha$ et la force de frottement $R_T = P\sin\alpha$ ce qui est vérifie $R_T \le \mu_s \cdot R_N$, on dit que la réaction est dans le cône de frottement statique :



Mais dès que l'angle $\alpha > \varphi_S$.

On a toujours $R_N = P\cos\alpha$ mais la valeur $\mu_s \cdot R_N$ est supérieure à $R_{T\,max}$ donc on calcule désormais $R_T = \mu_D \cdot R_N$ car le solide se met à glisser.



3.4 Résolution des problèmes de statique

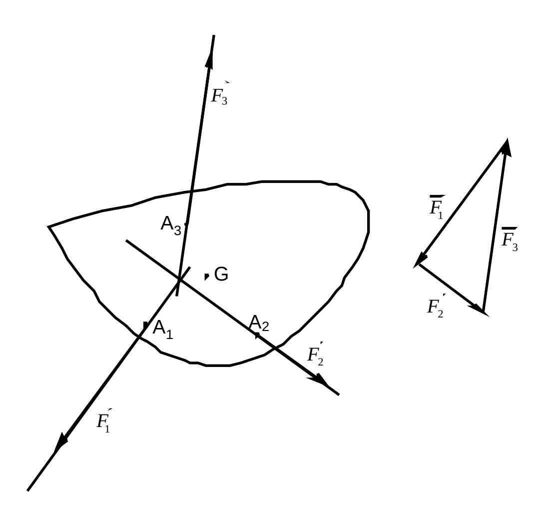
3.4.1 Solide en équilibre sous l'action de 2 forces

Pour qu'un solide soit en équilibre sous l'action de 2 forces, il faut et il suffit que les deux forces soient égales et directement opposées.

3.4.2 Solide en équilibre sous l'action de 3 forces

Pour qu'un solide soit en équilibre sous l'action de 3 forces, il faut et il suffit que :

- les 3 forces soient coplanaires.
- les 3 forces soient concourantes au même point.
- chacune des forces soit opposée à la somme géométrique des 2 autres : dynamique fermé.



3.4.3 Solide en équilibre sous l'action de n forces

Propriété très importante :
La projection sur un plan d'un système de n forces en équilibre est un systèmes de n forces coplanaires en équilibre.

Pour les corps possédant un plan de symétrie ce plan sera toujours choisi comme plan de projection.

3.4.4 Méthode

Pour résoudre un problème de statique il faut procéder généralement ainsi :

- Réaliser un dessin de situation où figure le système à étudier dans son environnement extérieur sans y faire figurer de forces.
- Réaliser un dessin où ne figure que le système étudié et les forces extérieures qu'il subit.
- Faire un bilan des caractéristiques connues et inconnues des forces.
- Réaliser la construction mathématique traduisant les conditions d'équilibre : le dynamique des forces.
- Exploiter ces différentes étapes pour résoudre le problème.

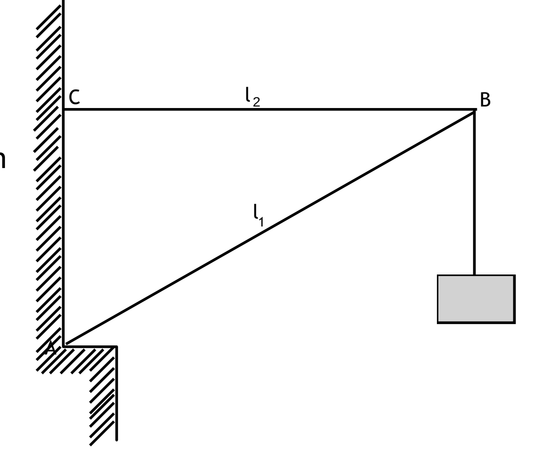
L'utilisation du moment par rapport à un axe donne une équation :

$$\sum M_{/\Delta} = 0$$

Et l'utilisation de la projection de la somme vectorielle des forces sur un plan (Oxy) en fournit deux autres :

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = 0$$

TRAVAUX DIRIGES SUR LA STATIQUE



Exercice 1 : La potence

Soit une potence constituée :

- d'une barre métallique homogène de longueur $AB=l_1=3{,}5m$ et de masse m=20kg
- d'un câble horizontal de longueur $BC=l_2=2{,}0m$ et de poids négligeable devant la tension

On suspend en B un câble de 1kg auquel est attaché une charge de 89kg.

a) Faire un bilan des forces s'appliquant sur la barre. On nommera β l'angle que fait la réaction avec la verticale.

b) Rappeler les conditions d'équilibre puis les exprimer en fonction des données du problème.

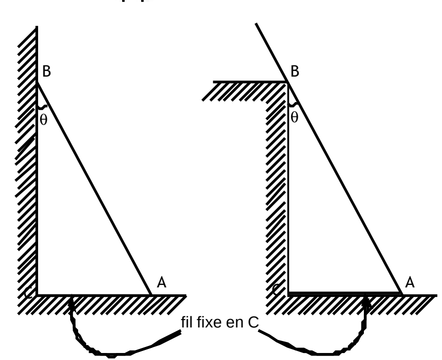
c) En déduire la valeur de la tension du câble et de la réaction en A. On prendra g=10 N/kg

Exercice 2 : La console mobile

Soit une console constituée d'un triangle rectangle isocèle ABC et tel que AB=AC=l.
Son poids est négligeable devant la charge portée sur AC.
Elle est installée sur un tuyau de diamètre 2r.
Soit k le coefficient de frottement de glissement entre la console et le tuyau.

Calculer la distance minimale x à l'axe du tuyau pour laquelle la charge P peut être supportée sans qu'il y ait glissement de la console.

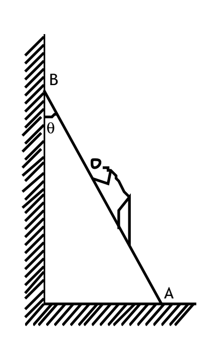
Exercice 3: L'échelle



1) Soit une échelle de poids P en contact avec une **paroi lisse** et un **sol lisse**.

a) Montrer que si les contacts se font sans frottement, il est impossible d'appuyer l'échelle obliquement contre un mur vertical.

b) Dans les exemples ci-contre exprimer la réaction en A et B ainsi que la tension T du fil en fonction de P, l=AB et θ.



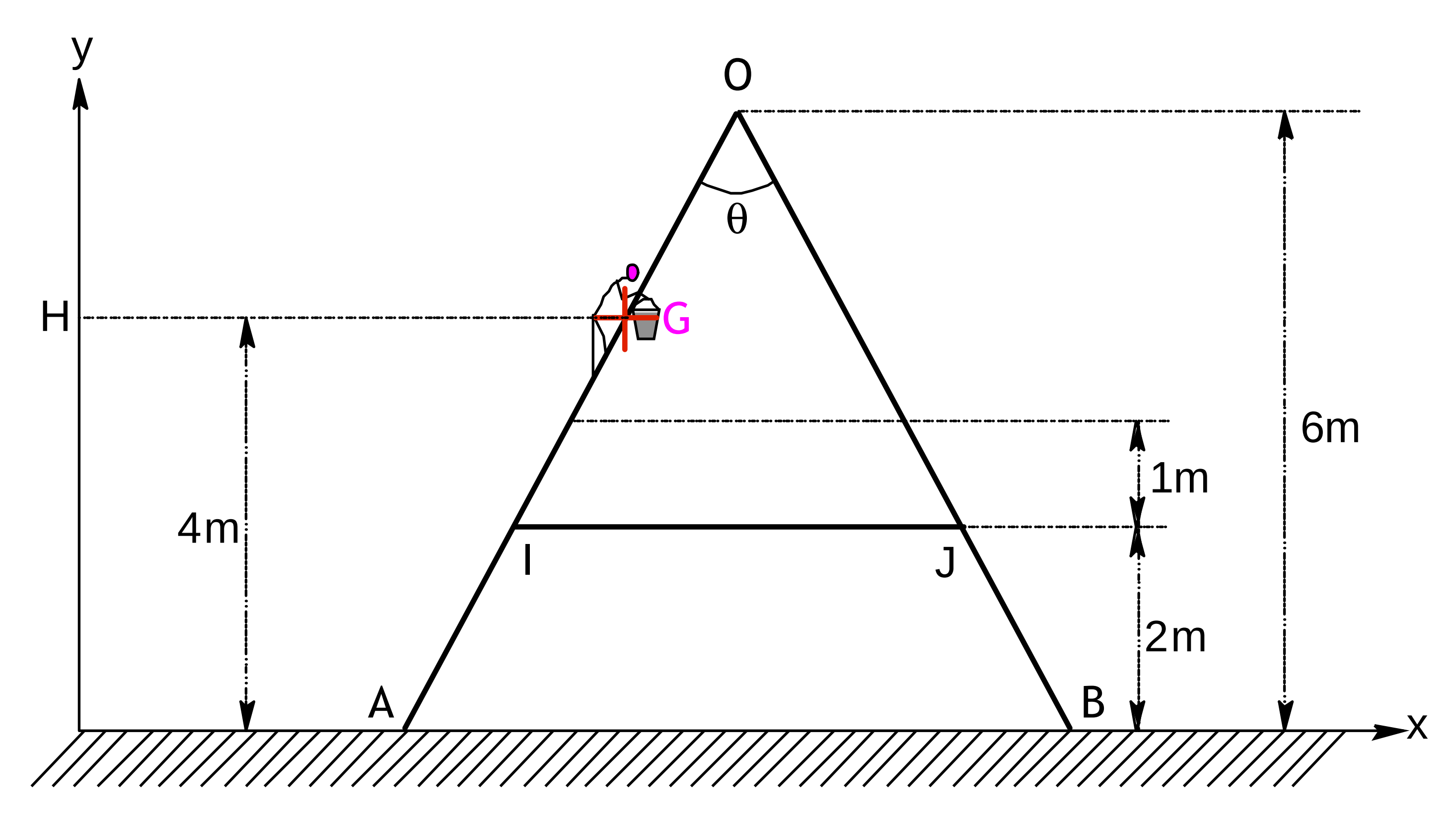
2) On considère désormais dans la suite de l'exercice un **sol rugueux**, et l'échelle n'est plus maintenue par un fil.

a) Calculer l'angle de frottement φ pour maintenir juste l'échelle en équilibre. En déduire les réactions en A et B et le coefficient de frottement statique ($l=5m$, $P_1=250N$, $\theta_{max}=30°$)

b) Exprimer la longueur l_1 en fonction de l'inclinaison θ de l'échelle à laquelle un homme de poids P_2 peut monter. Faire l'application numérique avec un enfant de 30kg et un homme de 100kg pour un angle de 20°.

c) Inversement exprimer la condition pour qu'un homme de poids P_2 puisse monter en haut de l'échelle. Faire l'application avec un homme de 70kg.

Exercice 4 corrigé Partiel 2003 :



Considérons une échelle double constituée de deux échelles simples en aluminium de 20 kg chacune.
Les deux échelles sont liées par un axe parfait sans frottement en O et attachées en I et J par une corde.
La corde est de poids négligeable.
Le sol sur laquelle elle est posée est considéré comme parfaitement lisse et donc sans frottement.
Un homme muni d'un seau a son centre de masse G sur l'échelle à une hauteur de 4m, l'ensemble pesant 80kg.
On prendra pour simplifier g=10N/kg
Pour simplifier nos relations, on ne prendra pas en compte les forces s'exerçant en O.
L'angle q *est de 60°.*

1° Faire un bilan de forces s'exerçant sur l'échelle et compléter l'annexe en les faisant figurer. On explicitera les coordonnées des différentes forces dans le repère cartésien.

2° Rappeler les conditions d'équilibre des forces et des moments par rapport au point O

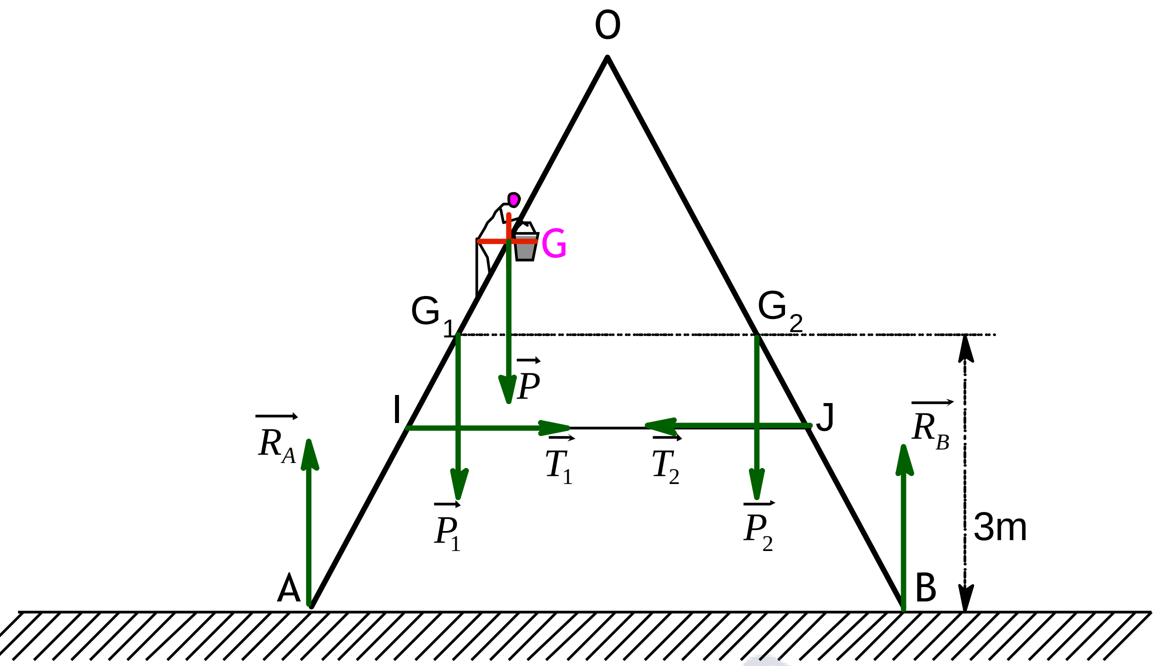
3° Exploiter ces conditions pour établir les équations que doivent satisfaire les forces. On calculera pour cela le moment vectoriel des forces par rapport au point O.

(Rappel $\tan(30°) = 1/\sqrt{3}$ et donc $\vec{OG}\begin{pmatrix} -2/\sqrt{3} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$)

4° En déduire les valeurs des réactions au sol.

Exercice 4 Partiel 2003 :

1°)



On a : $\vec{R_A}\begin{pmatrix}0\\R_A\\0\end{pmatrix}_{cart}$ $\vec{R_B}\begin{pmatrix}0\\R_B\\0\end{pmatrix}_{cart}$ $\vec{P_1}\begin{pmatrix}0\\-P_1\\0\end{pmatrix}_{cart}$ $\vec{P_2}\begin{pmatrix}0\\-P_2\\0\end{pmatrix}_{cart}$ $\vec{P}\begin{pmatrix}0\\-P\\0\end{pmatrix}_{cart}$ $\vec{T_1}\begin{pmatrix}T_1\\0\\0\end{pmatrix}_{cart}$ $\vec{T_2}\begin{pmatrix}-T_2\\0\\0\end{pmatrix}_{cart}$

2°)

$$\vec{R_A}+\vec{R_B}+\vec{P_1}+\vec{P_2}+\vec{P}+\vec{T_1}+\vec{T_2}=\vec{0}$$

$$\vec{M}_{\vec{R_A}/O}+\vec{M}_{\vec{R_B}/O}+\vec{M}_{\vec{P_1}/O}+\vec{M}_{\vec{P_2}/O}+\vec{M}_{\vec{P}/O}+\vec{M}_{\vec{T_1}/O}+\vec{M}_{\vec{T_2}/O}=\vec{0}$$

3°)

- $\vec{R_A}+\vec{R_B}+\vec{P_1}+\vec{P_2}+\vec{P}+\vec{T_1}+\vec{T_2}=\vec{0}$ entraîne :

  $\boxed{T_1-T_2=0}$ (u)

  $\boxed{R_A+R_B-P_1-P_2-P=0}$ (v)

- $\vec{M}_{\vec{R_A}/O}+\vec{M}_{\vec{R_B}/O}+\vec{M}_{\vec{P_1}/O}+\vec{M}_{\vec{P_2}/O}+\vec{M}_{\vec{P}/O}+\vec{M}_{\vec{T_1}/O}+\vec{M}_{\vec{T_2}/O}=\vec{0}$ entraîne :

on a :

$\vec{OG}\begin{pmatrix}-2/\sqrt{3}\\-2\\0\end{pmatrix}$ $\vec{OG_1}\begin{pmatrix}-3/\sqrt{3}\\-3\\0\end{pmatrix}$ $\vec{OG_2}\begin{pmatrix}3/\sqrt{3}\\-3\\0\end{pmatrix}$ $\vec{OI}\begin{pmatrix}-4/\sqrt{3}\\-4\\0\end{pmatrix}$ $\vec{OJ}\begin{pmatrix}4/\sqrt{3}\\-4\\0\end{pmatrix}$ $\vec{OA}\begin{pmatrix}-6/\sqrt{3}\\-6\\0\end{pmatrix}$ $\vec{OB}\begin{pmatrix}6/\sqrt{3}\\-6\\0\end{pmatrix}$

$\vec{M}_{\vec{R_A}/O}=\vec{OA}\wedge\vec{R_A}$ soit $\vec{M}_{\vec{R_A}/O}\begin{pmatrix}-6/\sqrt{3}\\-6\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\R_A\\0\end{pmatrix}$ et donc $\boxed{\vec{M}_{\vec{R_A}/O}=\frac{-6}{\sqrt{3}}R_A\cdot\vec{e_z}}$

De même $\boxed{\vec{M}_{\vec{R_B}/O}=\frac{6}{\sqrt{3}}R_B\cdot\vec{e_z}}$; $\boxed{\vec{M}_{\vec{P_1}/O}=\frac{3}{\sqrt{3}}P_1\cdot\vec{e_z}}$; $\boxed{\vec{M}_{\vec{P_2}/O}=\frac{-3}{\sqrt{3}}P_2\cdot\vec{e_z}}$ et $\boxed{\vec{M}_{\vec{P}/O}=\frac{2}{\sqrt{3}}P\cdot\vec{e_z}}$

$\vec{M}_{\vec{T_1}/O}=\vec{OI}\wedge\vec{T_1}$ soit $\vec{M}_{\vec{T_1}/O}\begin{pmatrix}-4/\sqrt{3}\\-4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}T_1\\0\\0\end{pmatrix}$ et donc $\boxed{\vec{M}_{\vec{T_1}/O}=4T_1\cdot\vec{e_z}}$ et aussi $\boxed{\vec{M}_{\vec{T_2}/O}=-4T_2\cdot\vec{e_z}}$

$$\vec{M}_{\vec{R}_A/O}+\vec{M}_{\vec{R}_B/O}+\vec{M}_{\vec{P}_1/O}+\vec{M}_{\vec{P}_2/O}+\vec{M}_{\vec{P}/O}+\vec{M}_{\vec{T}_1/O}+\vec{M}_{\vec{T}_2/O}=\left(\frac{-6}{\sqrt{3}}R_A+\frac{6}{\sqrt{3}}R_B+\frac{3}{\sqrt{3}}P_1-\frac{3}{\sqrt{3}}P_2+\frac{2}{\sqrt{3}}P+4T_1-4T_2\right)\cdot\vec{e}_z$$ s

oit $\boxed{\frac{-6}{\sqrt{3}}R_A+\frac{6}{\sqrt{3}}R_B+\frac{3}{\sqrt{3}}P_1-\frac{3}{\sqrt{3}}P_2+\frac{2}{\sqrt{3}}P+4T_1-4T_2=0}$ (w)

4°)

De w et v on déduit : $-6R_A+6R_B+3P_1-3P_2+2P=0$

Avec les valeurs $P=800N$; $P_1=P_2=200N$ on obtient le système

$$\begin{cases} R_A-R_B=\dfrac{2\cdot 800}{6} \\ R_A+R_B=200+200+800 \end{cases} \quad \begin{cases} R_A-R_B=800/3 \\ R_A+R_B=1200 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} R_A=733N \\ R_B=467N \end{cases}}$$

4 Dynamique des solides
La dynamique est la partie de la mécanique qui étudie les causes du mouvement.

4.1 Eléments de dynamique
Pour qui a bien compris que tout mouvement pouvait se construire à partir d'un mouvement de translation et de rotation, a compris la nécessité des torseurs. Cette entité composée de deux vecteurs traduisant le mouvement de translation et de rotation a été introduite avec les forces. C'est désormais avec les éléments cinétiques que nous allons le définir.

4.1.1 Le torseur cinétique
Le torseur cinétique [P] correspond aux grandeurs [quantité de mouvement, moment cinétique] décrites ci-après.

Il est important de noter que ces grandeurs dépendent du référentiel choisi.

4.1.1.1 Quantité de mouvement
Pour étudier le mouvement d'un solide ponctuel isolé, on pourrait se contenter de connaître sa vitesse. Mais l'étude du mouvement de deux solides en interaction ne pourra se faire que par la pondération des vitesses par une grandeur qui dépend de l'objet.

Cette grandeur est appelée masse inerte (inerte : inertie : vitesse).

L'expérience montre que cette grandeur qui pondère la vitesse d'un solide est la même que celle qui pondère la force gravitationnelle des solides entre eux.

Elle est nommée masse grave.

On nommera donc masse sans distinction la masse grave et la masse inerte.

Aussi on va utiliser un vecteur $\vec{p}$ qui correspond à la pondération de la vitesse par cette grandeur appelée masse :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$\vec{p}$ est appelée **quantité de mouvement**.

Lorsque le solide n'est pas ponctuel il faudra utiliser la **résultante cinétique** :

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

4.1.1.2 Moment cinétique

Dans le cas d'un solide quelconque, il faudra en plus de la résultante cinétique du solide définir le moment total associé appelé **moment cinétique résultant** :

$$\vec{L}_{O/R} = \sum_i \vec{OM}_i \wedge \vec{p}_i$$

Dans le cas d'une distribution non pas discrète mais continue on calculera

$$\vec{p} = \iiint r \cdot \vec{v} \cdot d^3 t \quad \text{et} \quad \vec{L}_{O/R} = \iiint \vec{OM} \wedge r \cdot \vec{v} \cdot d^3 t$$

4.1.1.3 Arrêt, rotation et translation.
Par analogie avec le torseur force où l'on avait défini les 3 cas : équilibre, couple et translation on peut écrire les 3 cas suivant :

- Le solide est à l'arrêt : $\vec{p} = \vec{0}$ et $\vec{L}_{O/R} = \vec{0}$
- Le solide est en rotation : $\vec{p} = \vec{0}$ et $\vec{L}_{O/R} \neq \vec{0}$
- Le solide est en translation : $\vec{p} \neq \vec{0}$ et $\vec{L}_{O/R} = \vec{0}$

4.1.1 Le torseur dynamique

Lorsque la vitesse varie on utilise l'accélération pour décrire cette variation.

De la même façon on peut définir un torseur dynamique [D] à partir de

la quantité d'accélération et du moment dynamique.

Et pour un solide on prendra

la résultante dynamique et le moment dynamique résultant

$$\vec{D} = \sum_i m_i \vec{a}_i \qquad \vec{N}_{O/R} = \sum_i \vec{OM}_i \wedge \vec{D}_i$$

$$\vec{D} = \iiint r \cdot \vec{a} \cdot d^3t \quad \text{et} \quad \vec{N}_{O/R} = \iiint \vec{OM} \wedge r \cdot \vec{a} \cdot d^3t$$

4.2 Principes fondamentaux de la dynamique

4.2.1 Enoncé de Newton

Première loi : Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, sauf si des forces imprimées le contraignent d'en changer.

Deuxième loi : Le changement de mouvement est proportionnel à la force imprimée et s'effectue suivant la droite par laquelle cette force est imprimée.

Troisième loi : La réaction est toujours contraire à l'action : ou encore les actions que deux corps exercent l'un sur l'autre sont toujours égales et dirigées en sens contraire.

4.2.2 Enoncé mathématique du principe fondamental

Ce principe issu de la deuxième loi de Newton rend équivalent deux grandeurs fondamentalement différentes en liant le mouvement aux forces.

Dans un référentiel galiléen R, le mouvement d'un système de points matériels par rapport à un point fixe O de R vérifie l'équation torsorielle suivante :

$$\frac{d[P]}{dt} = [F_{/O,ext}]$$

en notant $[F_{/O,ext}]$ le torseur des forces extérieures dont le moment est calculé par rapport à O.
En extrayant du torseur ses deux composantes vectorielles, on obtient les deux théorèmes suivants :

4.2.3 Théorème de la quantité de mouvement, Théorème de la résultante cinétique

Dans le cas d'un solide ponctuel on obtient le théorème de la quantité de mouvement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Dans le cas d'un solide non ponctuel on parle de théorème de la résultante cinétique.

4.2.4 Théorème du moment cinétique

Le théorème liant les moments s'exprime par :

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \sum \vec{M}_{Fext/O}$$

Ce théorème peut s'avérer utile même lorsque la résultante du moment des forces est nulle car le moment cinétique est alors une constante vectorielle. Mais on l'utilisera surtout pour l'étude des solides et non pour l'étude de la dynamique du point.

4.3 Dynamique des particules chargées

Ce chapitre de dynamique se place d'emblée dans un cadre restreint d'étude des particules.

Celles-ci sont considérées comme ponctuelles, oubliant ainsi la possibilité d'une éventuelle rotation de la particule sur elle-même et restreignant l'étude à un problème de dynamique du point.
Leurs vitesses sont supposées très inférieures à la vitesse de la lumière pour rester dans le cadre de la mécanique newtonienne.

4.3.1 Forces de champ

Les particules chargées possèdent deux caractéristiques intrinsèques :
- leur masse m,
- leur charge q,

et la caractéristique de mouvement : leur vitesse v.

Champ gravitationnel :

C'est dans un champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$ qu'apparaît la **force de gravitation** :

$$\boxed{\vec{F}_G = m \cdot \vec{\mathcal{G}}}$$

Avec le champ $\vec{\mathcal{G}}$ créé par une distribution volumique de masse $M = \iiint \rho \cdot d^3\tau$ qui à la distance r de la particule vaut :

$$\vec{\mathcal{G}} = -G \iiint \frac{\vec{r}}{r^3} \rho \cdot d^3\tau$$

Champ électromagnétique :

C'est dans un champ électromagnétique $\left(\vec{E}, \vec{B}\right)$ qu'apparaît la **force de Lorentz** :

$$\boxed{\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$

L'étude sur terre d'une particule telle que l'électron de masse $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg$ et de charge $q = -1{,}6 \cdot 10^{-19} C$ et de vitesse $v = \dfrac{c}{10} \cong 3 \cdot 10^8 m \cdot s^{-1}$ soumis aux champs habituels:

$$\left\|\vec{\mathcal{G}}\right\| = 9{,}81 N \cdot kg^{-1}, \left\|\vec{E}\right\| = 10^3 V \cdot m^{-1} \text{ et } \left\|\vec{B}\right\| = 10^{-5} T$$

met en concurrence :

- une force gravitationnelle $\left\|\vec{F}_G\right\| \approx 10^{-29} N$

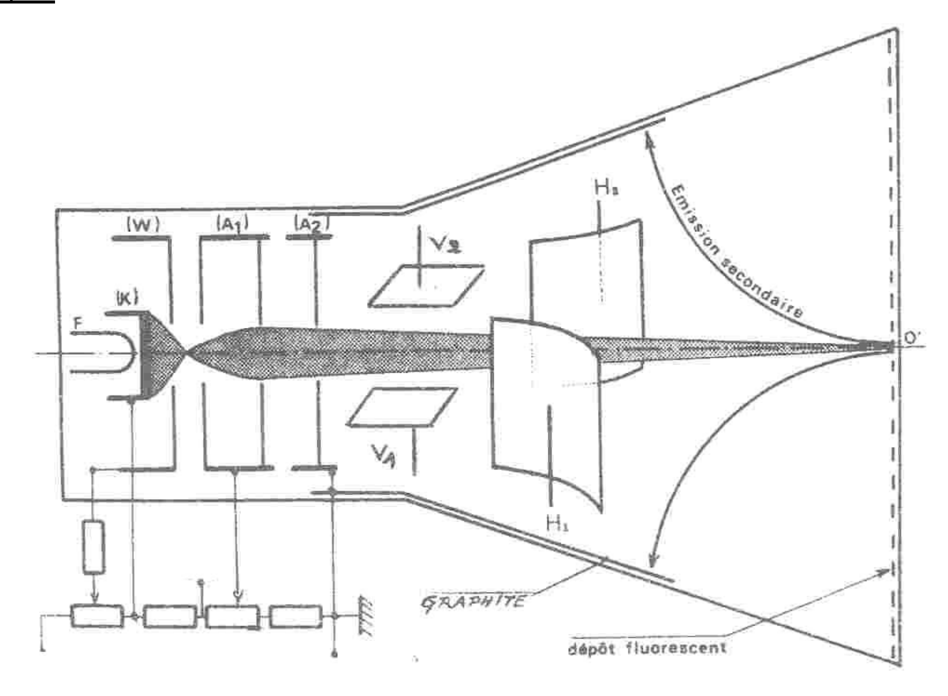
- une force de Lorentz $\left\|\vec{F}_L\right\| \approx 10^{-16} N$

La force de Lorentz est alors dix mille milliards (10^{13}) de fois plus intense que la force gravitationnelle.

On négligera donc généralement la force gravitationnelle devant la force de Lorentz.

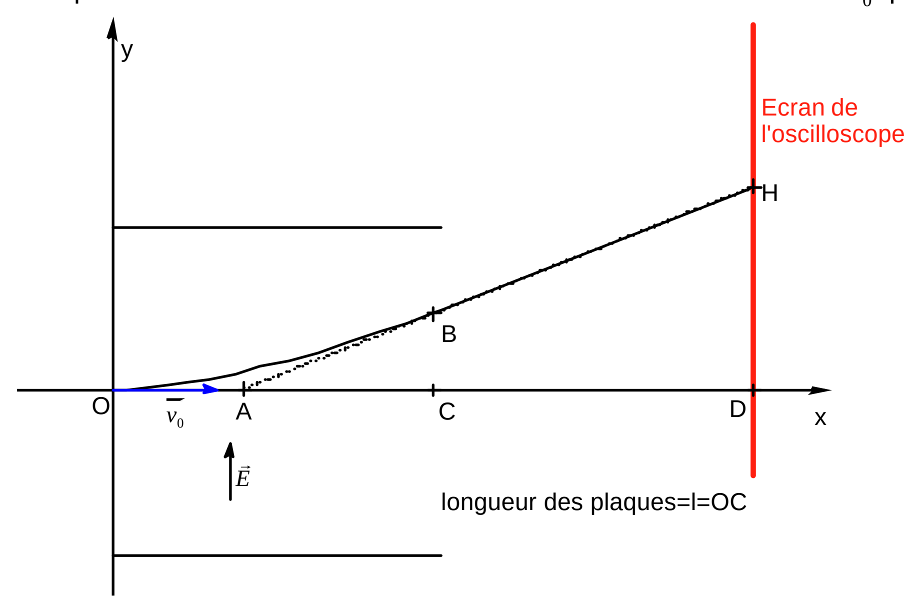
TRAVAUX DIRIGES SUR LA DYNAMIQUE

Exercice 1 : L'oscilloscope .



1°) Déterminer les forces subies par une particule de charge **q** , de masse **m** , lorsqu'elle est située dans un espace où règne un champ électrique $\vec{E}$.
Comparer ces forces sur l'exemple du proton : **$q=1,6.10^{-19}$ C, $m=1,67\ .10^{-27}$ kg, $E=1kV.m^{-1}$** (faible champ)
Conclusion.

2°) En soumettant deux plaques métalliques parallèles à une tension **V**, on crée entre elles un champ uniforme $\vec{E}$.
Supposons qu'une particule pénètre à l'instant **t=0** dans le domaine de $\vec{E}$ avec une vitesse $\vec{v_0}$ perpendiculaire à $\vec{E}$.



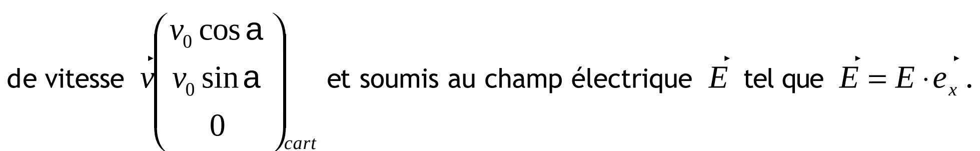
a) Donner les équations horaires du mouvement.

b) La particule sort du champ au point **B** et prend, en l'absence de force, un mouvement rectiligne dans la direction $\vec{v_B}$ dont le support passe par **A.**
Déterminer les deux composantes de $\vec{v_B}$: v_{B_x} et v_{B_y} en fonction de : **E, l, q, m et v_0.**

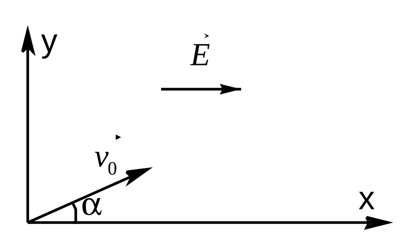
c) La particule touche l'écran au point **H**.
Déterminer les coordonnées de H en fonction de **E, l, AD, q, m et v_0.**

Exercice 2 corrigé : Particule dans un champ électrique.

Soit la particule de charge q initialement prise à l’origine du repère, de masse m,



de vitesse $\vec{v}\begin{pmatrix} v_0\cos\alpha \\ v_0\sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}_{cart}$ et soumis au champ électrique $\vec{E}$ tel que $\vec{E} = E\cdot\vec{e_x}$.



1°) Exprimer le théorème de la dynamique
2°) En déduire les coordonnées des vecteurs accélération, vitesse et position.
3°) Déterminer l’équation de la trajectoire.
4°) En prenant $\alpha=0$ répondre aux questions 2) et 3) et en déduire la nature du mouvement.
5°) Même question avec $\alpha=\pi/2$.

Exercice 3 corrigé : Particule dans un champ magnétique

Soit la particule de charge q initialement prise à l’origine du repère, de masse m, de vitesse $\vec{v}\begin{pmatrix} v_0\sin\alpha \\ 0 \\ v_0\cos\alpha \end{pmatrix}_{cart}$ et soumis au champ magnétique $\vec{B}$ tel que $\vec{B} = B\cdot\vec{e_z}$.

1°) Donner l’expression du théorème de la quantité
2°) En posant $\omega_c = \frac{qB}{m}$ déterminer l’expression des coordonnées des vecteurs accélération puis vitesse.
3°) En utilisant les coordonnées du vecteur vitesse, montrer que la coordonnées de position x vérifie l’équation différentielle : $\boxed{\ddot{x} + \omega_c^2\cdot x = 0}$
4°) En déduire l’expression du vecteur position et la nature du mouvement.

Exercice 2 : Particule dans un champ électrique.

1°) L'application du théorème de la quantité de mouvement donne :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q \cdot \vec{E}$$

2°)

$$\vec{a}\begin{pmatrix} \ddot{x} = \dfrac{qE}{m} \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{pmatrix}_{cart} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} = \dfrac{qE}{m}t + v_0\cos\alpha \\ \dot{y} = v_0\sin\alpha \\ \dot{z} = 0 \end{pmatrix}_{cart} \qquad \vec{OM}\begin{pmatrix} x = \dfrac{qE}{2m}t^2 + v_0 t\cos\alpha \\ y = v_0 t\sin\alpha \\ z = 0 \end{pmatrix}_{cart}$$

3°) D'où l'équation de la trajectoire :

$$x = \frac{qE}{2m}\frac{y^2}{v_0^2\sin^2\alpha} + \frac{y}{\tan\alpha}$$

4°) $\alpha = \mathbf{0}$:

$$\vec{OM}\begin{pmatrix} x = \dfrac{qE}{2m}t^2 + v_0 t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{pmatrix}_{cart} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} = \dfrac{qE}{m}t + v_0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{pmatrix}_{cart} \qquad \vec{a}\begin{pmatrix} \ddot{x} = \dfrac{qE}{m} \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{pmatrix}_{cart}$$

Il s'agit d'un mouvement rectiligne uniformément varié dans le sens du champ

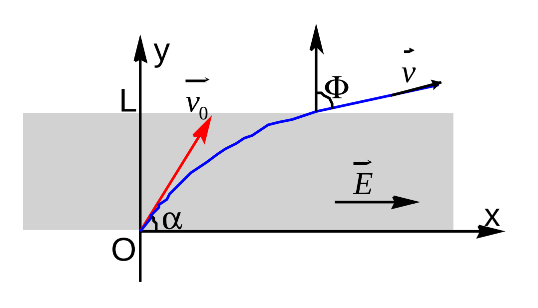
5°) $\alpha = \boldsymbol{\pi/2}$:

$$\vec{OM}\begin{pmatrix} x = \dfrac{qE}{2m}t^2 \\ y = v_0 t \\ z = 0 \end{pmatrix}_{cart} \qquad \vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} = \dfrac{qE}{m}t \\ \dot{y} = v_0 \\ \dot{z} = 0 \end{pmatrix}_{cart} \qquad \vec{a}\begin{pmatrix} \ddot{x} = \dfrac{qE}{m} \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{pmatrix}_{cart}$$

L'équation de la trajectoire est alors : $x = \dfrac{qE}{2mv_0^2}y^2$ qui est l'équation d'une parabole d'axe Ox.

Il s'agit d'un mouvement parabolique uniformément varié.

Si le champ électrique n'est que sur une hauteur L on obtient :



$$L = v_0 t \;\text{ et }\; \tan\varphi = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{\dfrac{qE}{m}\cdot\dfrac{L}{v_0}}{v_0} = \frac{qEL}{m}$$

soit $\varphi = Arc\tan(\dfrac{qEL}{m})$ ou $\dfrac{q}{m} = \dfrac{\tan\varphi}{EL}$

Exercice 3 : Particule dans un champ magnétique

1°) L'application du théorème de la quantité de mouvement donne :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\cdot\vec{v}\wedge\vec{B} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q\cdot B}{m}\cdot\vec{v}\wedge\vec{e}_z$$

2°)

Posons $\omega_c = \frac{qB}{m}$, on a $\vec{v}\wedge\vec{e}_z\begin{pmatrix}\dot{y}\\ -\dot{x}\\ 0\end{pmatrix}$ soit : $\vec{a}\begin{pmatrix}\ddot{x} = \omega_c\cdot\dot{y}\\ \ddot{y} = -\omega_c\cdot\dot{x}\\ \ddot{z} = 0\end{pmatrix}_{cart}$ et par intégration $\vec{v}\begin{pmatrix}\dot{x} = \omega_c\cdot y + cst\\ \dot{y} = -\omega_c\cdot x + cst = -\omega_c\cdot x\\ \dot{z} = cst = v_0\cos\alpha\end{pmatrix}_{cart}$

3°)

En réintroduisant l'expression $\dot{y} = -\omega_c\cdot x$ dans l'expression de $\ddot{x} = \omega_c\cdot\dot{y}$ on obtient l'équation différentielle :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_c^2\cdot x = 0}$$

Comme indiqué en annexe 3 cette équation a pour solutions : $\left|\begin{array}{l} x = Ae^{i\omega_c t} + Be^{i\omega_c t}\\ ou\; x = A\cos\omega_c t + B\sin\omega_c t\\ x = A\cos(\omega_c t + \varphi)\end{array}\right.$

Les conditions initiales donnent à t=0 :

$$x = 0 \text{ et } \dot{x} = v_0\sin\alpha$$

Or en prenant $x = A\cos(\omega_c t + \varphi)$ comme type de solution on a à t=0

$$x = A\cos\varphi \text{ et } \dot{x} = -\omega_c A\sin\varphi$$

Ce qui permet de trouver les constantes $\varphi = \pi/2$ et $A = \frac{-v_0\sin\alpha}{\omega_c}$ or $x = A\cos(\omega_c t + \pi/2) = A\sin(\omega_c t)$ d'où

$$x = \frac{-v_0\sin\alpha}{\omega_c}\sin(\omega_c t)$$

$\dot{y} = -\omega_c\cdot x = v_0\sin\alpha\,\sin(\omega_c t)$ ce qui donne par intégration $y = \frac{v_0\sin\alpha}{\omega_c}\cos(\omega_c t) + cst$

Les conditions initiales donnent à t=0 $y = 0$:

$$y = \frac{v_0\sin\alpha}{\omega_c}\cos(\omega_c t) - \frac{v_0\sin\alpha}{\omega_c}$$

$$\boxed{\vec{OM}\begin{pmatrix} x = \frac{-v_0\sin\alpha}{\omega_c}\sin(\omega_c t)\\ y = \frac{v_0\sin\alpha}{\omega_c}\left(\cos(\omega_c t) - 1\right)\\ z = \left(v_0\cos\alpha\right)t \end{pmatrix}_{cart}}$$

On reconnaît le vecteur position d'un **mouvement hélicoïdal** (cf TDs de cinématique) de pas d'hélice $v_0\cos\alpha\cdot\frac{2\pi}{\omega_c}$ et de rayon $R = \frac{v_0\sin\alpha}{\omega_c}$.

5 Energétique

5.1 Grandeurs scalaires

L'utilisation de grandeurs scalaires plutôt que vectorielles permet à la fois de simplifier les équations et d'avoir une meilleure compréhension des phénomènes aux travers de grandeurs plus intuitives : les grandeurs énergétiques.

5.1.1 Puissance, Travail et Energie potentielle

Puissance

Dans le cas simple d'un solide ponctuel la puissance d'une force correspond au produit scalaire de la force par la vitesse de déplacement de son point d'application :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Dans le cas d'une force F agissant sur un système de points on écrira :

- pour une distribution discrète : $P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$

Ce qui peut se simplifier en introduisant la notion de solide et les grandeurs torsorielles associées. La puissance s'obtient à l'aide du coproduit torsoriel :

$$P = [F] \cdot [v]$$

qui correspond aux produits scalaires suivants :

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{M}_{\vec{F}} \cdot \vec{w}}$$

où $\vec{v}$ désigne la vitesse de translation du solide et $\vec{w}$ sa vitesse angulaire de rotation.

Lorsque P sera positif, on parlera de puissance motrice tandis qu'on parlera de puissance résistante dans le cas contraire.

L'unité de puissance est le Watt.

Travail

Le travail élémentaire d'un solide ponctuel dW correspond au produit de la force par le vecteur déplacement élémentaire :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{OA}$$

Que l'on peut aussi écrire par référence à la vitesse :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt$$

Dans le cas d'un système de points soumis à une force F on écrira :

$$dW = \sum_i \vec{F} \cdot \vec{v}_i \cdot dt$$

Ce qui se simplifie à l'aide des grandeurs torsorielles du solide par le coproduit torsoriel :

$$dW = [F] \cdot [v] \cdot dt$$

qui correspond aux produits scalaires suivants :

$$\boxed{dW = \left(\vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{M}_{\vec{F}} \cdot \vec{w}\right) dt}$$

où $\vec{v}$ désigne la vitesse de translation du solide et $\vec{w}$ sa vitesse angulaire de rotation.

On notera bien que généralement le travail élémentaire est une forme différentielle et le travail W que l'on calculera ne dépendra pas uniquement des états initiaux et finaux du système mais aussi du 'chemin' parcouru entre ces états.

L'unité de travail est le Joule.

Energie potentielle

Dans certains cas, le travail peut se mettre sous la forme d'une différentielle totale exacte et il ne dépend alors que des états initiaux et finaux. On parle alors non plus de travail mais d'énergie potentielle :

$$\boxed{d\mathrm{x}_p = -\mathrm{d}W}$$

On ne pourra définir cette grandeur que dans le cas de forces dites conservatives.

$$d\mathrm{x}_p = -\vec{F} \cdot d\vec{OA}$$

Ce qui s'écrira dans le cas d'un système de points :

$$d\mathrm{x}_p = -\sum_i \vec{F} \cdot d\vec{OA_i}$$

et dans le cas du solide :

$$d\mathrm{x}_p = -\left(\vec{F} \cdot \vec{v} + \vec{M} \cdot \vec{\mathrm{w}}\right)dt$$

Inversement on pourra dire que ces forces dérivent d'un potentiel et on traduira cela mathématiquement par :

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{grad}\,\mathrm{x}_p}$$

Entre deux états A et B, on pourra intégrer $d\mathrm{x}_p$ et calculer l'énergie potentielle x_p :

$$\mathrm{x}_p = \int d\mathrm{x}_p = -\int \vec{F} \cdot d\vec{OA}$$

Travail et énergie potentielle des forces usuelles

Le poids

On prend $\vec{P} = m\vec{g}$ et donc $\mathrm{d}W = m\vec{g} \cdot d\vec{OA}$.
Si l'on suppose que le solide est de masse constante et qu'il est placé dans un champ gravitationnel constant alors :

$$\mathrm{d}W = m\vec{g} \cdot d\vec{OA} = d\left(m\vec{g} \cdot \vec{OA}\right)$$

et donc définir une énergie potentielle élémentaire $d\mathrm{x}_p$:

$$\mathrm{d}W = d\left(m\vec{g} \cdot \vec{OA}\right) = -d\mathrm{x}_p$$

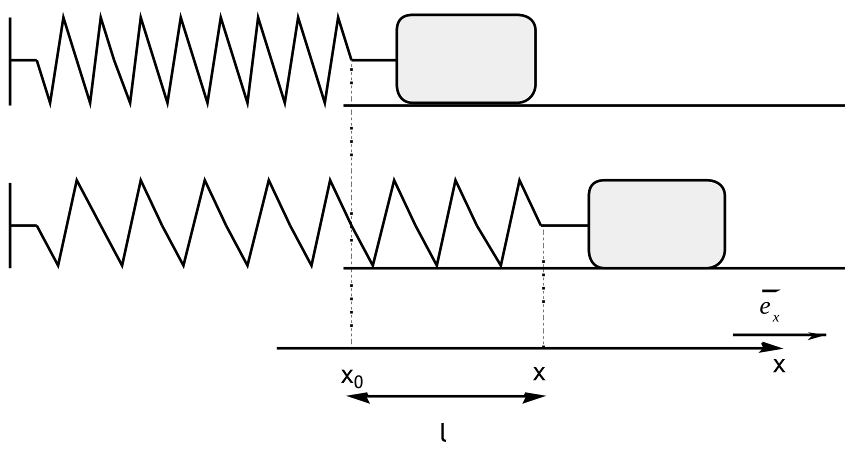
soit par intégration :

$$\boxed{\mathrm{x}_p = -m\vec{g} \cdot \vec{OA} + cst}$$

Le poids est donc une force conservative et on notera le travail : $\mathrm{d}W^c = m\vec{g} \cdot d\vec{OA}$ et l'on peut par exemple calculer dans le cas de la chute libre d'un corps d'un point A de hauteur h_A au point B de hauteur h_B:

$$W_P^c = \int_A^B \mathrm{d}W^c = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{OA} = mg(h_B - h_A) < 0 \text{ Travail resistant}$$

Force de rappel d'un ressort



$$\vec{F} = -k(x - x_0)\vec{e}_x = -kl\vec{e}_x$$

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot dl \cdot \vec{e}_x = -k \cdot l \cdot dl$$

où k est la constante de raideur du ressort et avec $l \cdot dl = \frac{1}{2} \cdot d\left(l^2\right)$ on peut écrire :

$$\mathrm{d}W = -d\left(\frac{1}{2} k \cdot l^2\right) = -d\mathrm{x}_p$$

et donc par intégration :

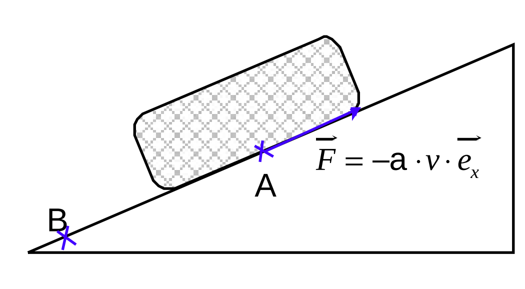
$$\boxed{\mathrm{x}_p = \frac{1}{2} k \cdot l^2 + cst}$$

Comme précédemment la force de rappel est une force conservative et on aura le travail :

$$W^c = \int_0^l \mathrm{d}W = -\int_0^{x-x_0} d\left(\frac{1}{2} k \cdot l^2\right) = -\frac{1}{2} k \cdot (x - x_0)^2$$

Il est à noter que l'intégration se fait sur l'allongement et non sur la position on n'a pas $W^c \neq \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}W$

Force de frottement visqueux



$$\vec{F} = -\mathrm{a} \cdot v \cdot \vec{e}_x$$

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot dl \cdot \vec{e}_x = -\mathrm{a} \cdot v \cdot dl$$

Dans ce cas le travail dépend de la vitesse que prend le mobile entre les points A et B on aura :

$$W^{nc} = \int \mathrm{d}W^{nc} = \int -\mathrm{a} \cdot v \cdot dl$$

et on ne peut définir d'énergie potentielle.
On dira que les forces de frottement sont non conservatives.

5.1.3 Energie cinétique

On a bâti précédemment une grandeur scalaire à partir du torseur force $P=[F]\cdot[v]$, on peut désormais faire de même avec le torseur cinétique.
Pour lui conserver son homogénéité avec une énergie et pouvoir utiliser le principe fondamental de la dynamique on défini l'énergie cinétique dans la cas du solide ponctuel par :

$$d\xi_c = d\vec{p}\cdot\vec{v}$$

soit :

$$d\xi_c = m\cdot\vec{v}\cdot d\vec{v} = d\left(\tfrac{1}{2}\cdot m\cdot v^2\right)$$

soit par intégration :

$$\xi_c = \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 + cst$$

On prend comme constante la valeur nulle pour avoir une énergie cinétique nulle à vitesse nulle.

$$\boxed{\xi_c = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2}$$

Dans le cas d'une distribution discrète de points on notera :

$$\xi_c = \sum_i \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot v_i^2$$

et d'une distribution continue :

$$\xi_c = \iiint_\tau \tfrac{1}{2}\cdot\rho\cdot v^2\cdot d^3\tau$$

Et en utilisant la notation plus simple des torseurs, l'énergie cinétique sera pour le solide

$$d\xi_c = d[p]\cdot[v]$$

soit par intégration :

$$\boxed{\xi_c = \frac{1}{2}\left(\vec{p}\cdot\vec{v}_c + \vec{L}_c\cdot\vec{\omega}_{S/R}\right)}$$

où C désigne le centre de masse du solide.

Dans le cas d'un mouvement de translation on aura : $\xi_c = \frac{1}{2}\left(\vec{p}\cdot\vec{v}_c\right)$

et d'un mouvement de rotation : $\xi_c = \frac{1}{2}\left(\vec{L}_c\cdot\vec{\omega}_{S/R}\right)$

5.1.4 Energie mécanique

On appellera énergie mécanique, la somme de l'énergie due au mouvement (ξ_c) et de l'énergie due aux forces conservatives :

$$\boxed{\xi_M = \xi_c + \xi_p}$$

Il est à noter que dans le cas d'un solide soumis à des forces intérieures et extérieures, l'énergie mécanique s'écrit en détaillant :

$$\xi_M = \xi_c + \xi_p^{ext} + \xi_p^{\text{int}}$$

Cette remarque prend toute son importance dans l'application du théorème de l'énergie mécanique.

5.1.5 Energie totale

On appellera énergie totale, la somme de toutes les formes d'énergie d'un solide et on le notera ξ.
On pourra décomposer cette énergie en deux types :

- les grandeurs énergétiques mesurables de la mécanique :
  - l'énergie cinétique du solide
  - l'énergie potentielle des forces extérieures.
- toutes les autres :
  - l'énergie interne U (qui comprend l'énergie potentielle des forces intérieures).

$$\boxed{\xi = \xi_c + \xi_p^{ext} + U}$$

5.2 Théorèmes mathématiques

5.2.1 Transport des moments

Calculons le moment en deux points différent O et O' :

$$\vec{M}_{\vec{F}/O'} = \vec{O'A} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M}_{\vec{F}/O} = \vec{OA} \wedge \vec{F} = \left(\vec{OO'} + \vec{O'A}\right) \wedge \vec{F} = \vec{OO'} \wedge \vec{F} + \vec{O'A} \wedge \vec{F}$$

$$\boxed{\vec{M}_{\vec{F}/O} = \vec{M}_{\vec{F}/O'} + \vec{OO'} \wedge \vec{F}}$$

et de même on aurai avec le moment cinétique :

$$\boxed{\vec{L}_{/O} = \vec{L}_{/O'} + \vec{OO'} \wedge \vec{p}}$$

5.2.2 Référentiel du centre de masse

Afin de simplifier certaines expressions, il est intéressant de définir un référentiel particulier appelé référentiel du centre de masse et noté R_c. Ce référentiel en translation par rapport au référentiel d'étude est tel que dans ce référentiel attaché au solide, sa résultante cinétique soit nulle.

$$\vec{p} = \iiint \rho \cdot \vec{v} \cdot d^3\tau = \vec{0}$$

$$\iiint \rho \cdot \frac{d\vec{OA}}{dt} \cdot d^3\tau = \vec{0}$$

Le centre d'inertie du solide se défini par:

$$\vec{OC} = \frac{1}{M} \iiint_{\tau} \rho \cdot \vec{OA} \cdot d^3\tau$$

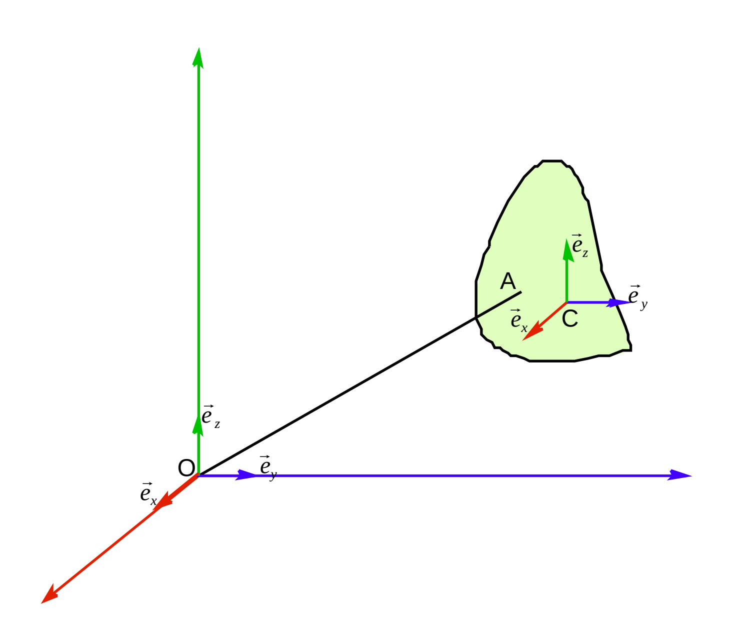
et donc $M \cdot \dfrac{d\vec{OC}}{dt} = \iiint_{\tau} \rho \cdot \dfrac{d\vec{OA}}{dt} \cdot d^3\tau$ soit $\vec{p} = M \cdot \vec{v}_{C/R_c} = \vec{0}$

dans le référentiel du centre de masse on aura

$$\vec{v}_{C/R_c} = \vec{0}$$

On retiendra que le centre de masse C est fixe dans ce référentiel défini par $\vec{p} = \vec{0}$

5.2.3 Théorème de Koenig



Utilisons pour démontrer ce théorème le moment cinétique d'une distribution continue de masse M.

Exprimons le moment cinétique dans R par rapport à O

$$\vec{L}_{/O,R} = \iiint \vec{OA} \wedge \rho \cdot \vec{v}_{A/R} \cdot d^3\tau$$

Exprimons le moment cinétique dans R_C par rapport à C (point fixe de R_C) :

$$\vec{L}_{/C,R_C} = \iiint \vec{CA} \wedge \rho \cdot \vec{v}_{A/R_C} \cdot d^3\tau$$

Le référentiel R_C étant en translation par rapport à R on a :

$$\vec{v}_{A/R} = \vec{v}_{A/R_C} + \vec{v}_{C/R}$$

$$\vec{L}_{/O,R} = \iiint \left(\vec{OC} + \vec{CA}\right) \wedge \rho \cdot \left(\vec{v}_{A/R_C} + \vec{v}_{C/R}\right) \cdot d^3\tau$$

$$\vec{L}_{/O,R} = \underbrace{\iiint \vec{OC} \wedge \rho \cdot \vec{v}_{A/R_C} \cdot d^3\tau}_{= \rho \cdot \vec{OC} \wedge \iiint \vec{v}_{A/R_C} \cdot d^3\tau} + \underbrace{\iiint \vec{CA} \wedge \rho \cdot \vec{v}_{A/R_C} \cdot d^3\tau}_{= \vec{L}_{C,R_C}} + \underbrace{\iiint \vec{OC} \wedge \rho \cdot \vec{v}_{C/R} \cdot d^3\tau}_{= \vec{OC} \wedge \vec{v}_{C/R} \cdot \iiint \rho \cdot d^3\tau \,=\, \vec{OC} \wedge M \vec{v}_{C/R}} + \underbrace{\iiint \vec{CA} \wedge \rho \cdot \vec{v}_{C/R} \cdot d^3\tau}_{= \iiint \vec{CA} \cdot d^3\tau \wedge \rho \cdot \vec{v}_{C/R}}$$

$$= \rho \cdot \vec{OC} \wedge \underbrace{\iiint \vec{v}_{A/R_C} \cdot d^3\tau}_{=0}$$

=0 par définition du reférentiel du centre de masse

$$= \vec{OC} \wedge \vec{v}_{C/R} \cdot \iiint \rho \cdot d^3\tau$$

$$= \vec{OC} \wedge M \vec{v}_{C/R}$$

$$= \underbrace{\iiint \vec{CA} \cdot d^3\tau}_{=0} \wedge \rho \cdot \vec{v}_{C/R}$$

=0 par définition du reférentiel du centre de masse

$$\boxed{\vec{L}_{/O,R} = \vec{L}_{/C,R_C} + \vec{OC} \wedge M \cdot \vec{v}_{C/R}}$$

Ce théorème qui se rapporte à un point fixe permet l'application plus aisée du théorème du moment cinétique.

Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique

$$\xi_c = \iiint_\tau \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{A/R}^2 \cdot d^3\tau$$

Avec de même que précédemment :

$$\vec{v}_{A/R} = \vec{v}_{A/R_C} + \vec{v}_{C/R}$$

$$\xi_c = \iiint_\tau \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(\vec{v}_{A/R_C} + \vec{v}_{C/R}\right)^2 \cdot d^3\tau$$

$$\xi_c = \underbrace{\iiint_\tau \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{A/R_C}^2 \cdot d^3\tau}_{= \xi_{C/R_C}} + \underbrace{\iiint_\tau \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_{C/R}^2 \cdot d^3\tau}_{= \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_{C/R}^2} + \underbrace{\iiint_\tau \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot 2 \cdot \vec{v}_{A/R_C} \cdot \vec{v}_{C/R} \cdot d^3\tau}_{= \rho \cdot \vec{v}_{C/R} \cdot \iiint_\tau \vec{v}_{A/R_C} d^3\tau}$$

$$= \rho \cdot \vec{v}_{C/R} \cdot \underbrace{\iiint_\tau \vec{v}_{A/R_C} d^3\tau}_{=0}$$

=0 par définition du réferentiel du centre de masse

$$\boxed{\xi_{C/R} = \xi_{C/R_C} + \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_{C/R}^2}$$

5.3 Théorème de l’énergie cinétique

Le théorème de l’énergie cinétique correspond à la mise en relation des grandeurs énergétiques au travers du principe fondamental de la dynamique.

$$\frac{d[p]}{dt} = [F]$$

en multipliant par [v] :

$$\frac{d[p]}{dt} \cdot [v] = [F] \cdot [v].$$

$$\frac{dx_c}{dt} = P = \frac{dW}{dt}.$$

$$\boxed{dx_c = dW}.$$

ou encore en intégrant :

$$\boxed{\Delta x_c = W}.$$

Le théorème s’énonce ainsi :

La variation d’énergie cinétique d’un solide correspond au travail des forces s’appliquant sur ce solide.

Remarques importantes :

- Lorsque l’on a énoncé le principe fondamental de la dynamique on a fait apparaître uniquement les forces extérieures car la somme des forces intérieures ainsi que la somme des moments des forces intérieures étaient nulles. Mais dans le théorème de l’énergie cinétique, le fait d’appliquer un produit scalaire avec la vitesse de chaque point du solide n’entraîne pas la nullité de la somme. Ainsi le théorème de l’énergie cinétique prend en compte des forces qui n’apparaissent pas dans le théorème fondamental de la dynamique. On peut donc écrire :

$$\Delta x_c = W_{\text{int}} + W_{ext}$$

- Il faut noter d’autre part que le travail désigne un transfert d’énergie et non une énergie. Ce transfert d’énergie correspond à la variation de l’énergie cinétique. Par contre, on peut dire qu’à tout instant le solide possède une énergie cinétique, ce qui n’est pas le cas avec le travail.

5.3 Théorème de l’énergie mécanique

L’intérêt de définir l’énergie mécanique et par la même d’utiliser un théorème de l’énergie mécanique est de faire apparaître une distinction entre forces conservatives et non conservatives.

En effet :

$$x_M = x_c + x_p$$

$$dx_M = dx_c + dx_p$$

d’après le théorème de l’énergie cinétique :

$$dx_c = dW^{cons} + dW^{non\ cons}$$

et par définition de l’énergie potentielle :

$$dx_p = -dW^{cons}$$

on a :

$$dx_M = dW^{cons} + dW^{non\ cons} - dW^{cons}$$

Soit :

$$\boxed{dx_M = dW^{non\ cons}}$$

$$\boxed{\Delta x_M = W^{non\ cons}}$$

Ainsi en l’absence de forces ne dérivant pas d’un potentiel l’énergie se conserve : $\Delta x_M = 0$
D’où l’appellation de conservative pour les forces dérivant d’un potentiel.

5.5 Transferts énergétiques

5.5.1 Différents types de transfert

On vient de voir que le travail noté **W** correspondait à un transfert d'énergie. Si l'on regarde un peu plus précisement le comportement des particules élémentaires qui subissent un travail, on s'aperçoit que leurs niveaux d'énergie varient mais que leur répartition dans ces niveaux énergétiques reste inchangée. C'est pourquoi on dit que le travail correspond à un transfert d'énergie macroscopique.

Par opposition, on définira un transfert d'énergie microscopique qui au sein des particules élémentaires se traduira par une modification non pas des niveaux d'énergie mais de la répartition des particules dans ceux-ci. Ces transferts sont nommés transfert calorique ou chaleur et noté **Q**

Ainsi défini il n'existe que deux types de transferts énergétiques :

- Le travail W : transfert d'énergie macroscopique,
- La chaleur Q : transfert d'énergie microscopique.

Le travail n'est pas forcément clairement associé à une force. Par exemple le travail électrique d'une resistance R sera $\delta W = P \cdot dt = R \cdot I^2 \cdot dt$

Qu'ils soient macroscopiques ou microscopiques, les transferts d'énergie se font sous plusieurs modes qui seront détaillés dans la suite du cours (par M[r] Dounies):

- les transferts **radiatifs** dû aux photons et appelé rayonnement,
- les transferts **convectifs** dû à un mouvement d'ensemble de la matière.
- les transferts **diffusifs** dû aux mouvements d'agitation de la matière et appelé conduction.

5.5.2 Premier principe de thermodynamique

Les principes qui régissent les lois de la physique sont peu nombreux. Après avoir énoncé les principes fondamentaux de la mécanique, voici le premier principe de thermodynamique :

Pour tout système n'échangeant avec l'extérieur que de l'énergie on a :

$$d\xi = \delta W + \delta Q$$
$$\Delta\xi = W + Q$$

où W et Q désignent les transfert d'énergie à travers la surface délimitant le système.

On pourra aussi écrire

$$\boxed{\Delta\left(U + \xi_c + \xi_{p_{ext}}\right) = W + Q}$$

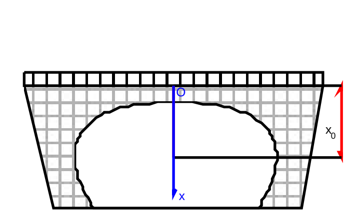
5.5.3 Rendement

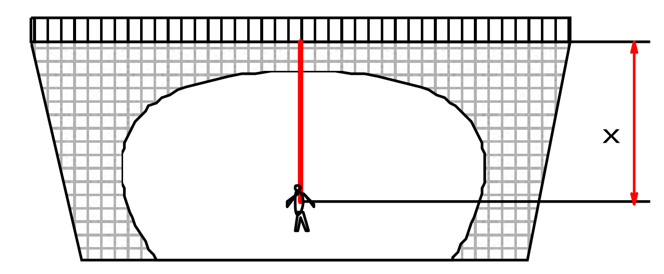
On définira le rendement comme le rapport :

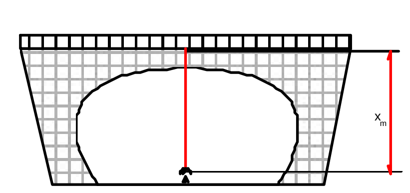
$$\eta = \frac{Energie\ utile}{Energie\ consommée}$$

TRAVAUX DIRIGES SUR L'ENERGETIQUE

Exercice 1 : Saut à l'élastique







a) Faites un bilan des forces à l'équilibre de cette personne de masse m=70kg suspendue à un élastique de raideur : $k = 420 N \cdot m^{-1}$, longueur à vide : 8m et $g = 10 N \cdot m^{-1}$

b) Calculez le travail des forces entre le haut du pont et une position quelconque x_A (vous ferez apparaître les deux phases du mouvement).

c) Rappelez le théorème de l'énergie cinétique et exprimer la vitesse v_A d'un point quelconque.

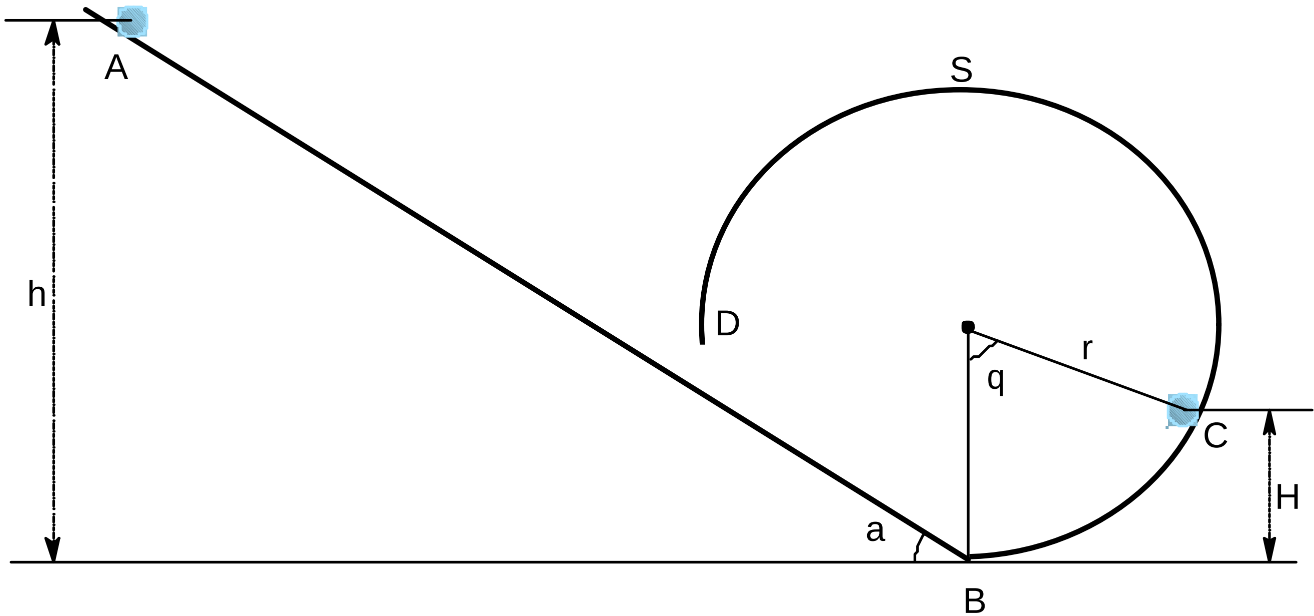
d) En déduire la longueur maximale atteinte.

e) Après avoir indiqué à quel moment de la trajectoire la vitesse est maximale vous la calculerez.

f) Après avoir indiqué à quel moment de la trajectoire la force de rappel est maximale vous la calculerez.

Exercice 2 : Mouvement d'un surfeur sur une vague

On modélise le mouvement du surfeur par un point de masse m en A sans vitesse initiale et l'on cherche à savoir quelle doit être la hauteur h pour que le surfeur atteigne le point S sommet de la vague.



1° Indiquer sur le schéma ci-dessus les forces s'exerçant sur le surfeur aux deux points indiqués A et C.

2° Traitement scalaire :

a) Exprimer le travail des forces lors d'un déplacement élémentaire.

b) Exprimer l'énergie potentielle du poids.

c) Appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour calculer la vitesse au point B.

d) Exprimer H en fonction de r et q .

e) Appliquer le théorème de l'énergie mécanique pour calculer la vitesse au point C en fonction de H et de v_B

3° Traitement vectoriel :

a) Indiquer ***dans le repère intrinsèque*** à la partie BD, les coordonnées des vecteurs forces, vitesse et accélération.

b) En appliquant le théorème fondamental de la dynamique, en déduire la valeur de la réaction R en fonction des données suivantes : m, r , q , v_C et g.

4° Indiquer la condition sur h pour que le surfeur atteigne le sommet S de la vague.

Exercice 3 corrigé : Mouvement d'une particule en interaction newtonienne ou coulombienne

Partie 1

a) Rappelez l'expression de la force de gravitation et de la force de Coulomb d'une particule de masse m et de charge q uniquement en interaction avec un système de masse M et de charge Q. Vous considérerez ce système comme origine du repère.

On notera désormais sans distinction ces forces sous la forme $\vec{F} = \frac{K}{r^2}\vec{e}_r$

b) Exprimer le moment de cette force par rapport à O.

Partie 2 Eléments cinétiques

a) En appliquant le théorème du moment cinétique, en déduire la propriété du moment cinétique d'une particule soumis à une interaction Coulombienne ou Newtonienne.
b) Rappelez l'expression générale du moment cinétique de cette particule. Que pouvez-vous en déduire sur la nature du mouvement d'une particule soumis à une interaction Coulombienne ou Newtonienne.
c) En déduire en coordonnées cylindriques, les vecteurs position et vitesse.
d) En déduire les éléments cinétiques (Energie, quantité de mouvement et moment).

Partie 3 Travail et énergie potentielle

a) Exprimer le travail élémentaire dW et montrer que l'on peut définir une énergie potentielle.
b) Exprimer l'énergie mécanique.

Partie 4 Equation du mouvement

Pour rechercher l'équation du mouvement on pose : $\boxed{u = \frac{1}{r}}$ et donc $r = \frac{1}{u}$ $\quad \dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2}$ $\quad \frac{du}{dj} = \frac{\dot{u}}{\dot{j}}$

a) Montrer que l'on peut écrire $x_c = \frac{L^2}{2m}\left[\left(\frac{du}{dj}\right)^2 + u^2\right]$

b) En déduire l'expression de l'énergie mécanique

c) Calculer $\frac{dx_M}{dj}$

d) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique et en utilisant le résultat précédent en déduire l'équation différentielle du mouvement (en u)

e) À l'aide de votre cours de math, donner l'expression de u et en déduire l'expression de r .

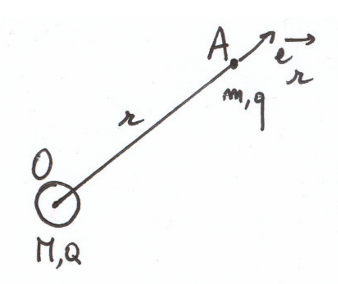
Exercice 2 : Mouvement d'une particule en interaction newtonienne ou coulombienne

Partie 1,2,3

1

a $\vec{F} = -m \frac{GM}{r^2} \vec{e_r}$

$\vec{F} = q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{e_r}$



(Au départ on se place en coordonnées sphériques)

b $\mathcal{M}_{\vec{F}/O} = \vec{OA} \wedge \vec{F} = r\vec{e_r} \wedge \frac{K}{r^2}\vec{e_r} = 0$

2.

a $\frac{d\vec{L_0}}{dt} = \mathcal{M}_{\vec{F}/O} = 0$ donc $\vec{L_0} = \vec{cst}$ le moment cinétique est une constante vectorielle.

b $\vec{L_0} = \vec{OA} \wedge m\vec{v_A} = \vec{cst}$

donc $\vec{OA}$ et $\vec{v_A}$ sont toujours dans un même plan

⇒ Le mouvement est plan

c $\vec{OA}\begin{pmatrix}\rho\\0\\0\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}\dot\rho\\\rho\dot\varphi\\0\end{pmatrix}$

d $\vec{v} = \dot\rho\vec{e_\rho} + \rho\dot\varphi\vec{e_\varphi}$

$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2)$

$\vec{p} = m\vec{v} = m\dot\rho\vec{e_\rho} + m\rho\dot\varphi\vec{e_\varphi}$

$\vec{L_0} = \vec{OA} \wedge \vec{p}$ $\begin{pmatrix}\rho\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\dot\rho\\m\rho\dot\varphi\\0\end{pmatrix}$ $\vec{L_0}\begin{pmatrix}0\\0\\m\rho^2\dot\varphi\end{pmatrix}$

$\vec{L_0} = m\rho^2\dot\varphi\vec{e_z}$

3

a $\delta W = \vec{F}\cdot\vec{d\rho} = \frac{K}{\rho^2}\vec{e_\rho}\cdot d\rho\,\vec{e_\rho} = \frac{K}{\rho^2}d\rho = d\left(-\frac{K}{\rho}\right) = -d\mathcal{E}_p$

$\mathcal{E}_p = \frac{K}{\rho} + cst$ quand $r \to \infty$ $\mathcal{E}_p \to 0$ donc $cst = 0$ $\mathcal{E}_p = \frac{K}{\rho}$

b $\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2) + \frac{K}{\rho}$

Partie 4 Equation du mouvement

4 a) $\frac{L}{m} = \rho^2 \dot{\varphi}$ $\left(\frac{L}{m}\right)^2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{u^4}$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \cdot \left(\frac{L}{m}\right)^2 \cdot \left(\left(-\frac{\dot{u}}{u^2}\right)^2 \cdot \frac{u^4}{\dot{\varphi}^2} + \frac{\dot{\varphi}^2}{u^2} \cdot \frac{u^4}{\dot{\varphi}^2}\right)$$

$$\mathcal{E} = \frac{L^2}{2m} \cdot \left(\frac{\dot{u}^2}{\dot{\varphi}^2} + u^2\right)$$

$$\mathcal{E}_c = \frac{L^2}{2m} \left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right)$$

b) $$\mathcal{E}_M = \frac{L^2}{2m} \left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right) + Ku$$

c) $$\frac{d\mathcal{E}_M}{d\varphi} = \frac{L^2}{2m} \left[\frac{d}{d\varphi}\left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right) + \frac{du^2}{d\varphi}\right] + K \frac{du}{d\varphi}$$

$$\frac{d\mathcal{E}_n}{d\varphi} = \frac{L^2}{2m} \left[2 \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d^2u}{d\varphi^2} + 2u \frac{du}{d\varphi}\right] + K \frac{du}{d\varphi}$$

d) $$\frac{d\mathcal{E}_n}{d\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{L^2}{m} \left[\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right] + K = 0$$

(En simplifiant par $\frac{du}{d\varphi}$).

soit $$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{Km}{L^2}$$

e) $$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0 \qquad u = A \cos(\varphi - \varphi_0)$$

on pose $p = \frac{L^2}{mK}$

la Solution Generale de l'Équation Complète (notée SGEC avec Mme Teillac) : $u = A \cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{p}$

$$\rho = \frac{p}{Ap \cos(\varphi - \varphi_0) - 1}$$ (qui est l'équation d'une conique)

6 Solide en rotation autour d'un axe de direction fixe

Après avoir défini les grandeurs et les théorèmes de la mécanique du solide, il nous reste à appliquer ces théories à des cas pratiques. Le premier exemple que nous avons traité était celui des particules chargées où l'on se ramenait à la dynamique du point.
Dans le cas de la dynamique du solide, trois cas sont envisageables pour le mouvement du solide :

- un mouvement de translation,
- un mouvement de rotation,
- la combinaison des deux précédents.

Le traitement du mouvement de translation est similaire aux traitements de dynamique du point.
Nous allons donc dans ce chapitre traiter les mouvements de rotation en l'absence de mouvement de translation.

Pour éviter de rentrer dans des traitements mathématiques matriciels qui apportent peu d'éléments supplémentaires à la compréhension physique des mouvements de rotation, on se restreindra à l'étude de solides ayant une symétrie sphérique ou cylindrique.

6.1 Moment d'inertie

Lors de mouvement de rotation, la répartition des masses du solide par rapport à l'axe de rotation est une caractéristique essentielle.
Il est nécessaire de bâtir une **grandeur intrinsèque** au solide qui prenne en compte cette répartition de masse.

La première idée pourrait être de définir d'une part une grandeur :

masse • distance à l'axe .

Mais la distance à l'axe apparaîtrait de nouveau dans l'expression de la vitesse de chaque point selon la relation $v = R\omega$, lors du calcul du moment cinétique.

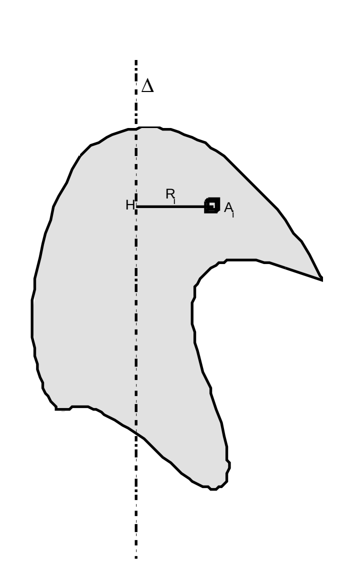
On définit donc la grandeur intrinsèque:

masse • distance à l'axe • distance à l'axe

soit :

$$I_\Delta = M \cdot R^2$$

6.1.1 Moment d'inertie par rapport à un axe



En prenant H_i le projeté orthogonal sur l'axe de rotation Δ de chaque point A_i affecté d'une masse m_i.

Si la ***distribution de masse est discrète*** on le calcule par $I_\Delta = \sum_i m_i \cdot (H_i A_i)^2$.

Si la ***distribution de masse est continue*** on le calcule par $I_\Delta = \iiint_\tau \rho_m \cdot HA^2 \cdot d^3\tau$ avec ρ_m la masse volumique notée ainsi pour ne pas la confondre avec le rayon polaire ρ.

Expressions par rapport aux axes du repère cartésien

En coordonnées cartésiennes :

Si Δ est l'axe Ox : $I_{Ox} = \iiint_\tau \rho_m \times (y^2 + z^2) \times dxdydz$

Si Δ est l'axe Oy : $I_{Oy} = \iiint_\tau \rho_m \times (x^2 + z^2) \times dxdydz$

Si Δ est l'axe Oz : $I_{Oz} = \iiint_\tau \rho_m \times (x^2 + y^2) \times dxdydz$

En coordonnées cylindriques :

Si Δ est l'axe Oz : $I_{Oz} = \iiint_\tau \rho_m \times \rho^2 \times d^3\tau$ avec $d^3\tau = d\rho \cdot \rho \cdot d\varphi \cdot dz$ soit :

$$I_{Oz} = \iiint_\tau \rho_m \cdot \rho^3 \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot dz$$

6.1.2 Moment d'inertie par rapport à un point

Pour des raisons de facilité de calcul, il peut être intéressant de définir le moment d'inertie par rapport à un point

$$I_O = \iiint_{\tau} \rho_m \times r^2 \times d^3\tau$$

En effet dans le cas d'une symétrie sphérique les axes Ox, Oy, et Oz sont équivalents et on a :

$$I_O = \iiint_{\tau} \rho_m \times \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \times d^3\tau$$

et donc :

$$2I_O = \iiint_{\tau} \rho_m \times \left(2x^2 + 2y^2 + 2z^2\right) \times d^3\tau = \iiint_{\tau} \rho_m \times \left(y^2 + z^2\right) \times d^3\tau \iiint_{\tau} \rho_m \times \left(x^2 + z^2\right) \times d^3\tau \iiint_{\tau} \rho_m \times \left(x^2 + y^2\right) \times d^3\tau$$

$$2I_O = I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz} = 3I_{O\Delta} \text{ avec } I_{O\Delta} = I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz}$$

et donc pour les solides à symétrie sphérique:

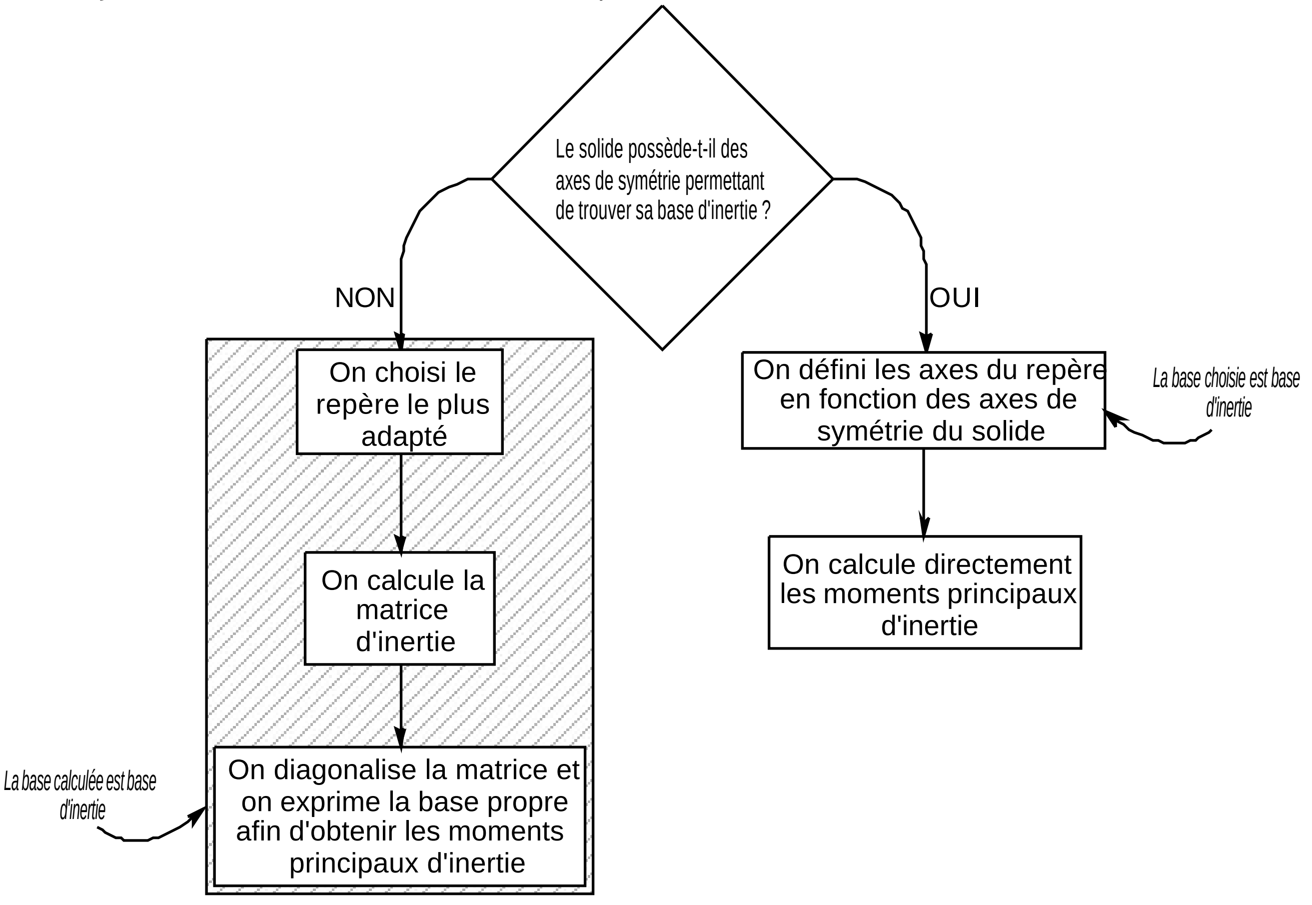
$$\boxed{I_{O\Delta} = \frac{2}{3} I_O}$$

6.1.3 Base principale d'inertie

Lors du mouvement de rotation d'un solide, l'axe de rotation ne correspond pas forcément aux axes de symétrie du solide.
Si le solide possède des axes de symétrie le choix des axes du repère s'en déduit afin de faciliter les calculs.
En effet :

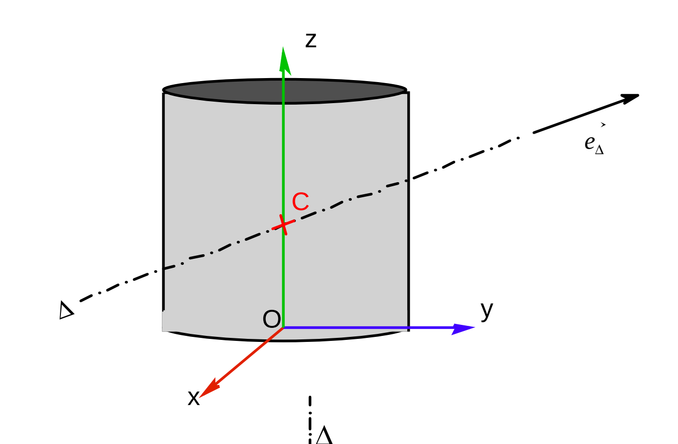
Tout axe de symétrie matérielle est axe principal d'inertie
Tout axe perpendiculaire à un plan de symétrie matérielle est axe principal d'inertie

On pourra donc très souvent être confronté à définir des moments d'inertie par rapport à un axe de rotation qui ne correspond pas aux axes de symétrie du solide.
Aussi toujours afin de faciliter les calculs, va-t-on procéder ainsi :



Dans ce cours on va se limiter aux solides à symétrie cylindrique et sphérique et donc la base cartésienne sera une base principale d'inertie et on aura :

- pour la symétrie sphérique $I_{Ox} = I_{Oy} = I_{Oz}$
- pour la symétrie cylindrique $I_{Ox} = I_{Oy}$



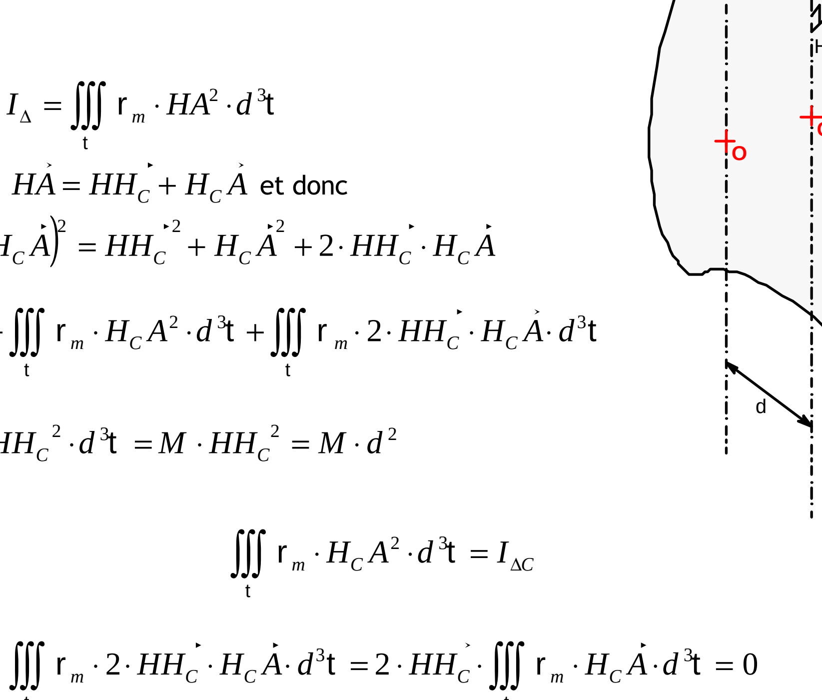
Donc on calculera d'abord ces moments d'inertie puis on en déduira le moment d'inertie par rapport à notre axe Δ quelconque par la relation simple :

$$I_{O\Delta} = I_{Ox} \cdot a^2 + I_{Oy} \cdot b^2 + I_{Oz} \cdot d^2$$

où l'axe Δ est de vecteur directeur $\vec{e}_\Delta \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix}$

6.1.4 Théorème d'Huyghens-Schteiner

Ce théorème permet de lier le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque avec le moment d'inertie d'un axe parallèle passant par le centre d'inertie du solide.
En effet on a :



$$I_\Delta = \iiint_\tau \rho_m \cdot HA^2 \cdot d^3\tau$$

avec $\vec{HA} = \vec{HH_C} + \vec{H_CA}$ et donc

$$\vec{HA}^2 = \left(\vec{HH_C} + \vec{H_CA}\right)^2 = \vec{HH_C}^2 + \vec{H_CA}^2 + 2 \cdot \vec{HH_C} \cdot \vec{H_CA}$$

$$I_\Delta = \iiint_\tau \rho_m \cdot HH_C^2 \cdot d^3\tau + \iiint_\tau \rho_m \cdot H_CA^2 \cdot d^3\tau + \iiint_\tau \rho_m \cdot 2 \cdot \vec{HH_C} \cdot \vec{H_CA} \cdot d^3\tau$$

$$\iiint_\tau \rho_m \cdot HH_C^2 \cdot d^3\tau = M \cdot HH_C^2 = M \cdot d^2$$

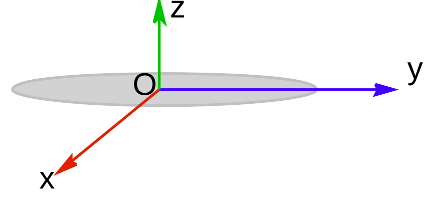
$$\iiint_\tau \rho_m \cdot H_CA^2 \cdot d^3\tau = I_{\Delta C}$$

$$\iiint_\tau \rho_m \cdot 2 \cdot \vec{HH_C} \cdot \vec{H_CA} \cdot d^3\tau = 2 \cdot \vec{HH_C} \cdot \iiint_\tau \rho_m \cdot \vec{H_CA} \cdot d^3\tau = 0$$

$$\boxed{I_\Delta = I_{\Delta C} + M \cdot d^2}$$

6.1.5 Exemples de calculs de moments d'inertie

Moment d'inertie d'un disque plein



La symétrie est cylindrique on prend donc :

$$I_{Oz} = \iiint_{\tau} \rho_m \cdot \rho^3 \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot dz$$



Le volume d'un disque de rayon R et d'épaisseur h est $V = \pi \cdot R^2 \cdot h$ donc :

$$I_{Oz} = \frac{M}{\pi \cdot R^2 \cdot h} \int \rho^3 \cdot d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz$$

$$I_{Oz} = \frac{M}{\pi \cdot R^2 \cdot h} \cdot \frac{1}{4} R^4 \cdot 2\pi \cdot h$$

$$\boxed{I_{Oz} = \frac{1}{2} M \cdot R^2}$$

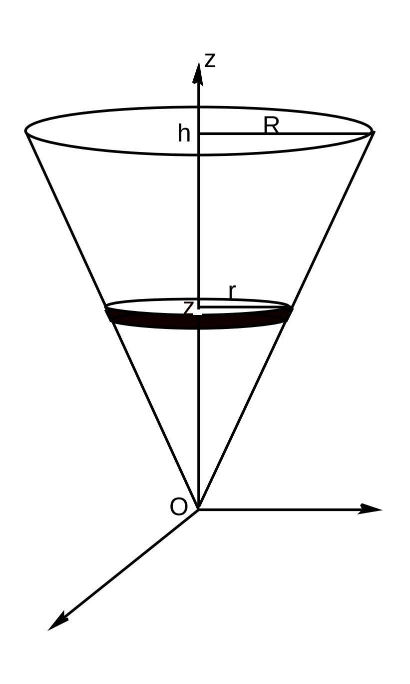
Moment d'inertie d'un cône plein régulier

Le cône est homogène de rayon R au sommet et de hauteur h

La masse du cône est $M = \frac{1}{3}\pi R^2 h \cdot \rho$ (cf Annexe4 § 5.3.1) donc $\rho_m = \frac{3M}{\pi R^2 h}$

Calculons le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz : I_z

On va utiliser le résultat précédent en considérant le cône comme un empilement de disques de rayon r :



$$I_{Oz} = \iiint_{\tau} d^3 I_{Oz}$$

avec

$$\boxed{d^3 I_{Oz} = \frac{1}{2} r^2 \rho_m d^3\tau}$$

$d^3\tau = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot z^2 dz$ et $\frac{r}{R} = \frac{z}{h}$ (cf Annexe4 § 4.3.3)

On obtient :

$$I_{Oz} = \iiint \frac{1}{2} r^2 \rho_m \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot z^2 d^3\tau$$

$$I_{Oz} = \frac{3M}{\pi R^2 h} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h \left(R \frac{z}{h}\right)^2 \cdot z^2 dz$$

$$I_{Oz} = \frac{3M}{\pi R^2 h} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^4 dz$$

$$\boxed{I_{Oz} = \frac{3}{10} \cdot M \cdot R^2}$$

Moment d'inertie d'une sphère creuse

Comme pour le calcul du centre d'inertie on se ramène à des calculs sur les éléments de surface.
La symétrie sphérique permet de calculer le moment d'inertie par rapport au point O et d'en déduire le moment d'inertie par rapport à l'axe selon $I_{O\Delta} = \frac{2}{3} I_O$

$$I_O = \iint_S \rho_S \cdot R^2 \cdot d^2S$$

L'élément de surface est alors $d^2S = Rd\theta \cdot R\sin\theta d\varphi$

Comme on l'a vu en Annexe4 § 4.2.2 la surface d'une sphère vaut $S = 4\pi R^2$ et donc $\rho_S = \frac{M}{4\pi R^2}$

$$I_O = \iint_S \frac{M}{4\pi R^2} \cdot R^2 \cdot Rd\theta \cdot R\sin\theta d\varphi$$

$$I_O = \frac{M}{4\pi} \cdot R^2 \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$I_O = \frac{M}{4\pi} \cdot R^2 \cdot 4\pi$$

$$I_O = M \cdot R^2$$

$$\boxed{I_{Oz} = \frac{2}{3} MR^2}$$

Moment d'inertie d'une sphère pleine

La symétrie sphérique permet de calculer le moment d'inertie par rapport au point O et d'en déduire le moment d'inertie par rapport à l'axe selon $I_{O\Delta} = \frac{2}{3} I_O$

$$I_O = \iiint_\tau \rho_m \cdot r^2 \cdot d^3\tau$$

L'élément de volume est : $d^3\tau = dr \cdot rd\theta \cdot r\sin\theta d\varphi$

Comme on l'a vu en cf Annexe4 § 4.3.2 le volume d'une sphère vaut $\tau = \frac{4}{3}\pi R^3$ et donc $\rho_m = \frac{3M}{4\pi R^3}$

$$I_O = \rho_m \cdot \iiint_\tau r^2 \cdot dr \cdot rd\theta \cdot r\sin\theta d\varphi$$

$$I_O = \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$I_O = \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} \cdot 2\pi$$

$$I_O = \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2 \cdot 2\pi$$

$$I_O = \frac{3}{5} \cdot MR^2$$

$$\boxed{I_{Oz} = \frac{2}{5} \cdot MR^2}$$

6.2 Cas d'un solide à symétrie cylindrique ou sphérique

Dans le cas du solide à symétrie cylindrique ou sphérique les axes du repère correspondent avec les axes principaux d'inertie.
Les relations fondamentales ci-dessous conservent toute leur généralité, mais pour les appliquer dans le cas général telles vont être présentées ici, il sera nécessaire de recourir à des calculs matriciels de produits d'inertie pour se placer dans la base principale d'inertie.

6.2.1 Moment cinétique - Moment d'inertie

Soit la rotation de ce cylindre autour de l'axe Oz nommé Δ
L'expression du moment cinétique :

$$\vec{L}_{O/R} = \iiint \vec{OM} \wedge \rho_m \cdot \vec{v} \cdot d^3\tau$$

Peut s'écrire sachant que :

$$\vec{OM}\begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{cyl}$$

Et que pour tout point M situé à une distance R de l'axe de rotation on a :

$$\vec{v}_{M/R}\begin{pmatrix} 0 \\ R\dot{\varphi} \\ 0 \end{pmatrix}_{cyl}$$

Le produit vectoriel donne :

$$\vec{OM} \wedge \vec{v}_{M/R}\begin{pmatrix} -zR\dot{\varphi} \\ 0 \\ R^2\dot{\varphi} \end{pmatrix}_{cyl}$$

d'où l'expression du moment cinétique :

$$\vec{L}_{O/R} = \left(\iiint \rho_m \cdot R^2\dot{\varphi} \cdot d^3\tau\right)\vec{e}_z - \left(\iiint \rho_m \cdot zR\dot{\varphi} \cdot d^3\tau\right)\vec{e}_\rho$$

où on peut montrer que le second terme est nul et donc la projection sur l'axe de rotation Oz du moment cinétique s'écrit :

$$L_\Delta = \vec{L}_{O/R} \cdot \vec{e}_z = \iiint \rho_m R^2\dot{\varphi} \cdot d^3\tau = \dot{\varphi} \cdot \iiint \rho_m R^2 d^3\tau$$

$$\boxed{L_\Delta = I_\Delta \cdot \dot{\varphi}}$$

6.2.2 Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe de rotation

La projection du moment cinétique et du moment des forces par rapport à l'axe de rotation permet d'écrire :

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} \cdot \vec{e}_z = \sum \vec{M}_{Fext/O} \cdot \vec{e}_z$$

$$\boxed{\sum M_{Fext/\Delta} = I_\Delta \cdot \ddot{\varphi}}$$

6.2.3 Expression de l'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

On sait que :

$$x_c = \iiint_t \tfrac{1}{2} \cdot r \cdot v^2 \cdot d^3 t$$

Dans le cas d'un solide en rotation ayant un point fixe l'expression de l'énergie se simplifie.

On a vu en 2.2.2 que l'expression de la vitesse est dans ce cas : $\vec{v} = \vec{w} \wedge \overrightarrow{OM}$
Ce qui permet d'écrire :

$$x_c = \iiint_t \tfrac{1}{2} \cdot r \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} \cdot d^3 t = \iiint_t \tfrac{1}{2} \cdot r \cdot \vec{v} \cdot \left(\vec{w} \wedge \overrightarrow{OM}\right) \cdot d^3 t$$

$$x_c = \iiint_t \tfrac{1}{2} \cdot r \cdot \vec{w} \cdot \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\right) \cdot d^3 t$$

$$x_c = \frac{1}{2}\left(\iiint_t \cdot r \cdot \left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}\right) \cdot d^3 t \right) \cdot \vec{w}$$

$$\boxed{x_c = \frac{1}{2} \vec{L}_{O/R} \cdot \vec{w}}$$

Dans le cas de la rotation autour de l'axe de direction fixe passant par le point O on a :

$L_\Delta = \vec{L}_{O/R} \cdot \vec{e}_z = I_\Delta \cdot \dot{j}$ et $\vec{w} = \dot{j} \cdot \vec{e}_z$

ce qui permet d'écrire :

$$\boxed{x_c = \frac{1}{2} I_\Delta \cdot \dot{j}^2}$$

6.2.2 Analogie avec le mouvement de translation

On peut faire apparaître l'analogie grâce au tableau suivant :

Grandeur	Translation selon l'axe Ox	Rotation autour de l'axe •
Energie cinétique	$x_c = \frac{1}{2} M \cdot v^2$	$x_c = \frac{1}{2} I_\Delta \cdot \dot{j}^2$
Théorème fondamental	$\sum \vec{F}_{ext} = M \cdot \ddot{x} \cdot \vec{e}_x$	$\sum M_{Fext/\Delta} = I_\Delta \cdot \ddot{j}$
Torseur cinétique	$p = m \cdot \dot{x}$	$L_\Delta = I_\Delta \cdot \dot{j}$

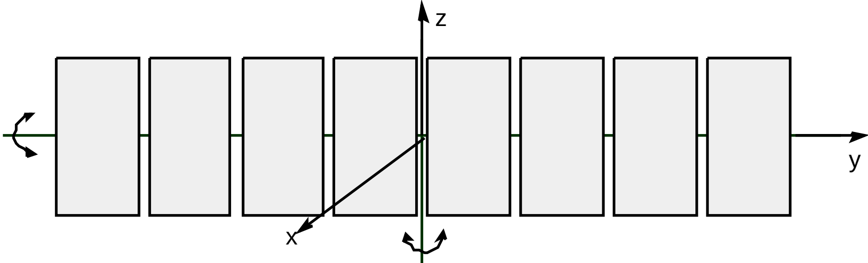
Ceci nous permet de mieux nous rendre compte de l'importance de moments d'inertie dans la compréhension physique des mouvements de rotation.

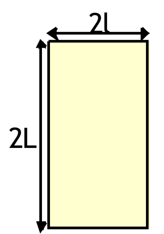
TRAVAUX DIRIGES SUR LA DYNAMIQUE DU SOLIDE

Etude d'un satellite géostationnaire

Exercice 1 : Etude d'un panneau solaire

On souhaite réaliser l'asservissement de position d'un ensemble de panneau solaire dont la disposition est la suivante :





L'espacement entre chaque panneau solaire est de e=2cm. Chaque panneau a pour dimension 2l=50cm et 2L=1m et une masse m.

1° Calculer les moments d'inertie par rapport aux axes horizontaux et verticaux d'un panneau solaire.
2° En utilisant le théorème d'Huygens-Schteiner en déduire le moment d'inertie de l'ensemble selon l'axe Oy et l'axe Oz.

3° La vitesse de rotation du panneau vaut $\vec{\omega} = \omega_y \vec{e_y} + \omega_z \vec{e_z}$ avec $\omega_y = 4{,}2 \cdot 10^{-2}\, rad \cdot s^{-1}$ et $\omega_z = 6\ rad \cdot s^{-1}$.
Exprimer puis calculer les moment cinétiques selon les axes Oy et Oz de l'ensemble des panneaux.
4° Calculer le couple moteur nécessaire à la mise en rotation de l'ensemble en 24 h. Les frottements sont négligés.

Exercice 2 : Etude du satellite

Le satellite de masse M=3t est assimilable à une sphère pleine de 12m de diamètre.

1° Exprimer puis calculer le moment d'inertie de la sphère pleine.

2° Calculer l'énergie cinétique de ce satellite géostationnaire d'altitude r=40 000 km qui tourne sur lui-même en une minute.



Exercice 3 : Etude d'un pied de robot

Le pied d'un robot est constitué d'une demi-boule articulée.

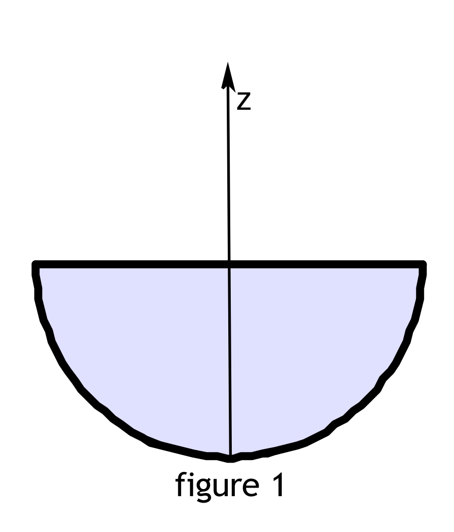


figure 1

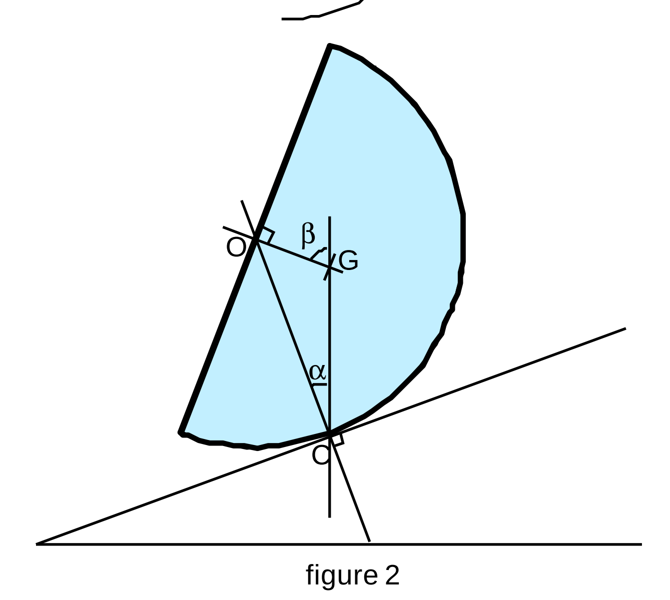
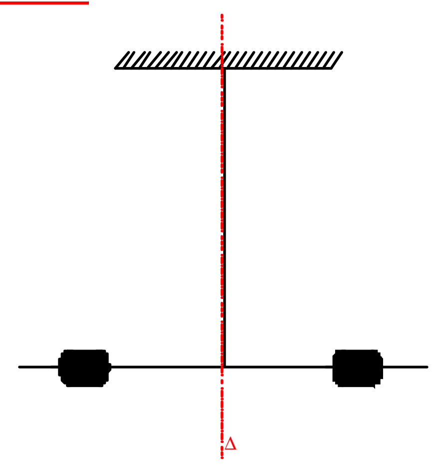


figure 2

1° Déterminer la position du centre d'inertie de la demi-boule de rayon r
2° Déduire très simplement de la partie 2, le moment d'inertie d'une demi-boule selon l'axe Oz
La demi boule est en équilibre sur le plan incliné.
3° Faire un bilan des forces.
4° Exprimer les conditions d'équilibre.
5° En déduire la relation liant α et β.
6° En déduire la pente maximale admissible.

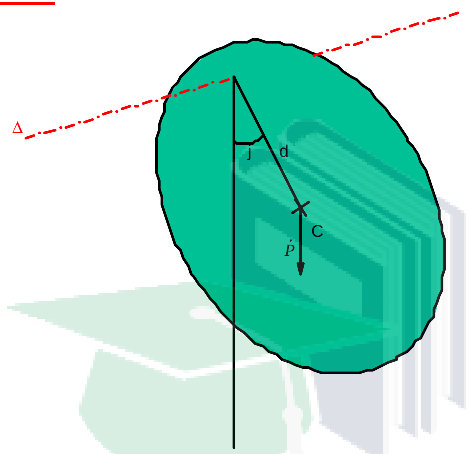
Exercice corrigé n°4 : Le pendule de torsion



Le pendule est soumis à un couple de torsion de moment de rappel $M = -C \cdot j$ où C est la constante de torsion.

1°- En appliquant le théorème du moment cinétique, donner l'équation différentielle du mouvement.
2°- En déduire la pulsation du mouvement oscillatoire

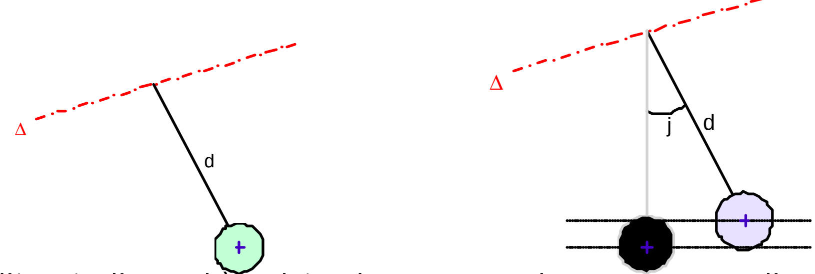
Exercice corrigé n°5 : Le pendule pesant



1°- Donner l'expression du moment du poids.
2°- Donner l'expression du moment d'inertie de ce disque de masse m tournant autour d'un axe • distant d'une distance d du centre de masse C.

3°- En déduire l'équation différentielle du mouvement :
4°- Dans le cas de faibles oscillations, on peut approximer $\sin j$ par j . Simplifier l'équation différentielle et en déduire la période des oscillations.

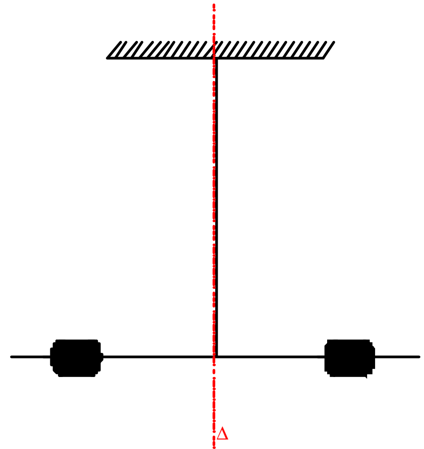
Exercice corrigé n°6 : Le pendule simple



1°) Exprimer le moment d'inertie d'une sphère pleine de masse m et de rayon r, autour d'un axe quelconque passant par le centre de la sphère.
2°) En utilisant le théorème d'Huyghens-Schteiner donner l'expression du moment d'inertie de la sphère suspendue à une tige de masse négligeable et de longueur d.
3°) Faire un bilan des forces s'appliquant à la sphère à l'équilibre.
4°) Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur pour un angle quelconque • (on prendra l'énergie potentielle nulle pour • =0).
6°) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique montrer que l'on a l'équation différentielle :

$$\dot{j}^2 + \frac{2gd}{d^2 + \frac{2}{5}r^2}(1 - \cos j) = x_M$$

Exercice corrigé n°4 : Le pendule de torsion

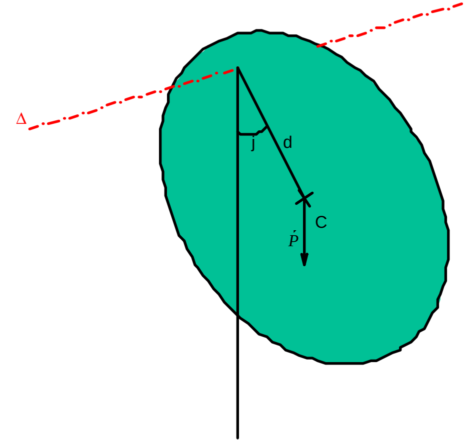


L'application du théorème du moment cinétique au pendule soumis à un couple de torsion de moment de rappel $M = -C \cdot \varphi$ où C est la constante de torsion donne l'équation différentielle:

$$I_\Delta \cdot \ddot{\varphi} + C \cdot \varphi = 0$$

traduisant un mouvement oscillatoire de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{C}{I_\Delta}}$

Exercice corrigé n°5 : Le pendule pesant



L'application du théorème du moment cinétique à ce disque de masse m tournant autour d'un axe • distant d'une distance d du centre de masse C donne avec le moment du poids

$$M = -mgd \cdot \sin\varphi$$

l'équation différentielle :

$$I_\Delta \ddot{\varphi} + mgd \cdot \sin\varphi = 0$$

qui dans le cadre des faibles oscillations peut s'approximer par :

$$I_\Delta \ddot{\varphi} + mgd \cdot \varphi = 0$$

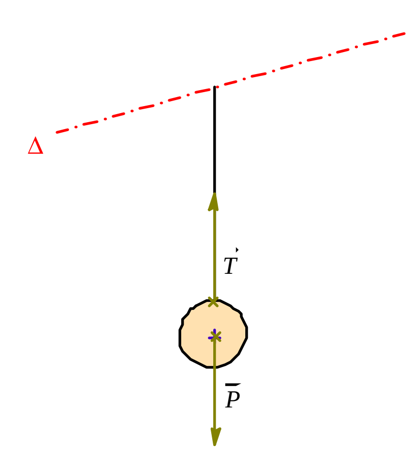
traduisant un mouvement oscillatoire de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{mgd}{I_\Delta}}$ et de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_\Delta}{mgd}}$

avec $I_\Delta = \dfrac{1}{2} m \cdot R^2 + md^2$

Exercice corrigé n°6 : Le pendule simple

Le pendule constitué d'une sphère de rayon r et de masse m suspendue à une tige de masse négligeable devant la sphère.

On a : $I_\Delta = m \cdot \left(d^2 + \frac{2}{5} r^2 \right)$



L'énergie potentielle de pesanteur est prise égale à 0 pour z=0, on a donc avec $z = d \cdot \cos\varphi$ l'expression :
$\xi_p = mg(d - d \cdot \cos\varphi)$

L'énergie cinétique vaut : $\xi_c = \frac{1}{2} I_\Delta \cdot \dot{\varphi}^2$

Le théorème de l'énergie mécanique donne : $\Delta\xi_M = 0$ soit $\xi_M = cst = \alpha$ et donc l'équation différentielle :

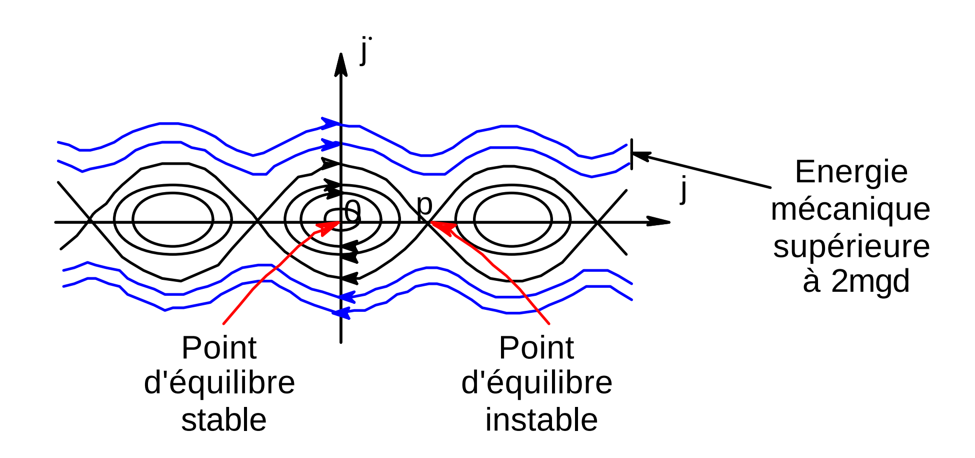
$$\frac{1}{2} m \cdot \left(d^2 + \frac{2}{5} r^2 \right) \cdot \dot{\varphi}^2 + mgd(1 - \cos\varphi) = \alpha$$

$$\dot{\varphi}^2 + \frac{2gd}{d^2 + \frac{2}{5} r^2} (1 - \cos\varphi) = \alpha$$

C'est une équation avec $\omega_0^2 = \frac{gd}{d^2 + \frac{2}{5} r^2}$ du type : $\dot{\varphi}^2 + 2\omega_0^2 (1 - \cos\varphi) = \alpha$ qui en dérivant donne une équation du type : $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \sin\varphi = 0$ comme le cas précédent du pendule pesant.

Etudions un peu plus en détail le mouvement du pendule à l'aide du portrait de phase qui est la représentation en abscisse du degré de liberté (ici φ) et de sa dérivée en ordonnée (ici $\dot{\varphi}$). D'après l'équation différentielle ci-dessus on a

$$y = \pm \sqrt{\alpha - \frac{2gd}{d^2 + \frac{2}{5} r^2} (1 - \cos\varphi)}$$



Annexes

Annexe 1. Les intégrales

1.1 Définitions

Primitive
Soit f une fonction réelle ou complexe définie dans un intervalle I. On appelle primitive de f toute fonction réelle ou complexe définie dans I telle que F’=f
Intégrale
Soient (x_0, x1, x2,…., x_n) une subdivision de [a,b] telle que la fonction f ait une valeur constante ci dans chaque intervalle]x_i,x_{i+1}[, on appelle intégrale de f le nombre réel :
$c_0(x_1-x_0)+c_1(x_2-x_1)+.....+c_n(x_n-x_{n-1})$
Ce nombre se note :

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

1.2 Propriétés

Intégrales équivalentes : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt$

Multiplication par une constante : $\int_a^b \text{l} f(x)dx = \text{l} \int_a^b f(x)dx$

Intégrale d’une somme : $\int_a^b \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Valeur absolue d’une intégrale : $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|dx$

Intervalles contigus : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Opposée de l’intégrale : $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Valeur moyenne : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

1.3 Méthodes d’intégration

En notant $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ et $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$ les dérivées simples et doubles par rapport au temps t.

Intégration par parties : $\int \dot{u} \cdot v \cdot dt = u \cdot v - \int u \cdot \dot{v} \cdot dt$

Changement de variable $x = \text{j}(t)$: $\int_a^b f(x)dx = \int_{\text{a}}^{\text{b}} f\left(\text{j}(t)\right) \cdot \dot{\text{j}}(t) \cdot dt$ avec $a = \text{j}(\text{a})$ et $b = \text{j}(\text{b})$

Annexe 2 Les différentielles

Forme différentielle :

$$\mathrm{d}W = A_1 dl_1 + A_2 dl_2 + A_3 dl_3$$

Différentielle exacte :

Si A_1, A_2 et A_3 sont les dérivées d'une même fonction A telles que :

$A_1 = \frac{\partial A}{dl_1}$, $A_2 = \frac{\partial A}{dl_2}$ et $A_3 = \frac{\partial A}{dl_3}$ alors c'est une différentielle exacte : $dW = A_1 dl_1 + A_2 dl_2 + A_3 dl_3$

La distinction entre *différentielle* et *forme différentielle* est importante car on ne peut calculer la valeur de W entre deux points x_1 et x_2 qu'avec une différentielle :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} dW$$

Dans le cas d'une forme différentielle, ce calcul n'est pas directement possible, W dépend du chemin suivi entre les deux points x_1 et x_2.



Annexe 3 Equations différentielles

3.1 Solutions types

$a\dfrac{dy}{dt}+by=0$ de solution $y=Ce^{-\frac{b}{a}t}$

$\dfrac{d^2y}{dt^2}-k^2y=0$ de solution $y=Ae^{kt}+Be^{-kt}$

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+k^2y=0$ de solutions $\left|\begin{array}{l} y=Ae^{ikt}+Be^{ikt} \\ ou\; y=A\cos kt+B\sin kt \\ y=A\cos(kt-j) \end{array}\right.$

$\dfrac{d^2y}{dt^2}+p\dfrac{dy}{dt}+qy=0$ en posant $r^2+pr+q=0$ de solutions $\left\{\begin{array}{l} \Delta>0: y=Ae^{r_1t}+Be^{r_2t} \\ \Delta=0: y=e^{r_1t}(At+B) \\ \Delta<0: \begin{array}{l} r_1=a+jb \;\; r_2=a-jb \\ y=e^{at}(A\cos bt+B\sin bt) \end{array} \end{array}\right.$

3.2 Méthode de résolution

Dans le cas d'une équation différentielle inhomogène (avec un second membre) on procède en deux temps :

- On prend une solution du type du second membre avec des constantes à déterminer et on remplace dans l'équation différentielle inhomogène pour obtenir la valeur des constantes.
- On cherche la solution de l'équation homogène.

Puis on additionne les deux solutions.

Exemple : Soit à résoudre $\dfrac{dy}{dt}+Ky=C$ où C est une constante

- $y=C'$ soit en remplaçant $KC'=C$ et donc $y=\dfrac{C}{K}$
- $\dfrac{dy}{dt}+Ky=0$ de solution $y=Ae^{-Kt}$

d'où la solution générale : $y=Ae^{-Kt}+\dfrac{C}{K}$

Annexe 4 Calculs de surfaces et de volumes

4.1 Formulaire

4.1.1 Coefficients

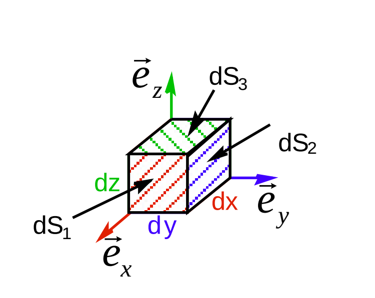
	d_1	d_2	d_3
Coordonnées cartésiennes	dx	dy	dz
Coordonnées cylindriques	dρ	dφ	dz
Coordonnées sphériques	dr	dθ	dφ

	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$	$\vec{e}_3$
Coordonnées cartésiennes	$\vec{e}_x$	$\vec{e}_y$	$\vec{e}_z$
Coordonnées cylindriques	$\vec{e}_r$	$\vec{e}_j$	$\vec{e}_z$
Coordonnées sphériques	$\vec{e}_r$	$\vec{e}_q$	$\vec{e}_j$

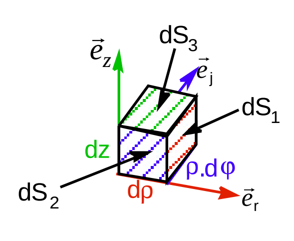
	c_1	c_2	c_3
Coordonnées cartésiennes	1	1	1
Coordonnées cylindriques	1	ρ	1
Coordonnées sphériques	1	r	r.sinθ

Déplacement élémentaire $d\vec{OM} = c_1 d_1 \cdot \vec{e}_1 + c_2 d_2 \cdot \vec{e}_2 + c_3 d_3 \cdot \vec{e}_3$

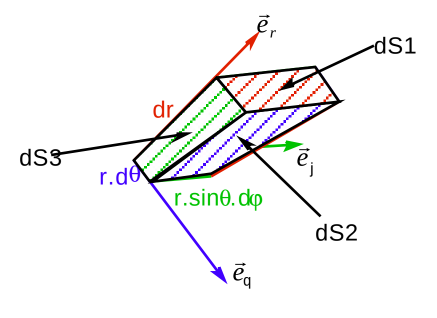
4.1.2 Calcul de surfaces



Cartésiennes



Cylindriques



Sphériques

	dS_1	dS_2	dS_3
Cartésienne	dy.dz	dx.dz	dx.dy
Cylindrique	dz.ρdφ	dρ.dz	dρ.ρdφ
Sphérique	r.dθ.r.sinθ.dφ	dr.r.sinθ.dφ	r.dθ.dr
général	$c_2.d_2.c_3.d_3$	$c_1.d_1.c_3.d_3$	$c_1.d_1.c_2.d_2$

4.1.3 Calcul de volumes

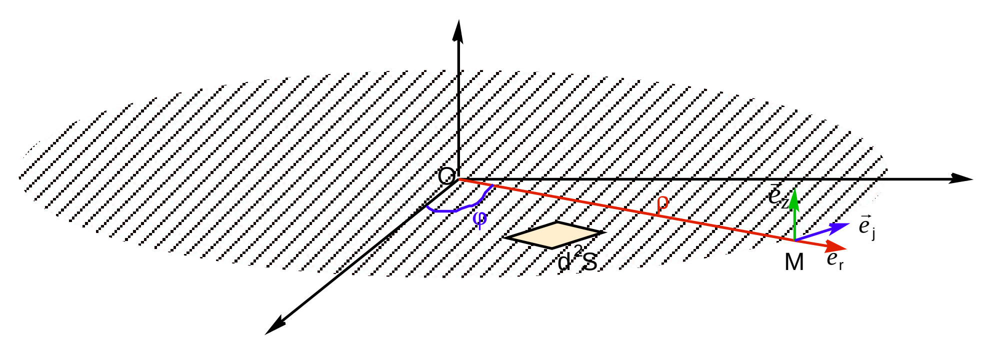
Comme pour le calcul de surface il est nécessaire pour ce calcul d'exprimer l'élément de volume qui permet de trouver les bornes d'intégration les plus simples.

$$dV = c_1 d_1 \cdot c_2 d_2 \cdot c_3 d_3$$

4.2 Exemples de calculs de surfaces

4.2.1 Surface d'un cercle

Les repères cylindre ou sphérique peuvent être utilisés dans ce cas.



Si l'on choisi la notation cylindrique on a une surface dans le plan $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$,

et donc un élément de surface $d^2S = \rho\, d\rho \cdot d\varphi$
avec ρ variant de 0 à R et φ de 0 à 2π :

$$S = \iint d^2S = \int_0^R \rho \cdot d\rho \times \int_0^{2\pi} d\varphi \;= \frac{R^2}{2} \times 2\pi \;= \pi R^2$$

4.2.2 Surface d'une sphère

Le repère sphérique doit être utilisé dans ce cas.

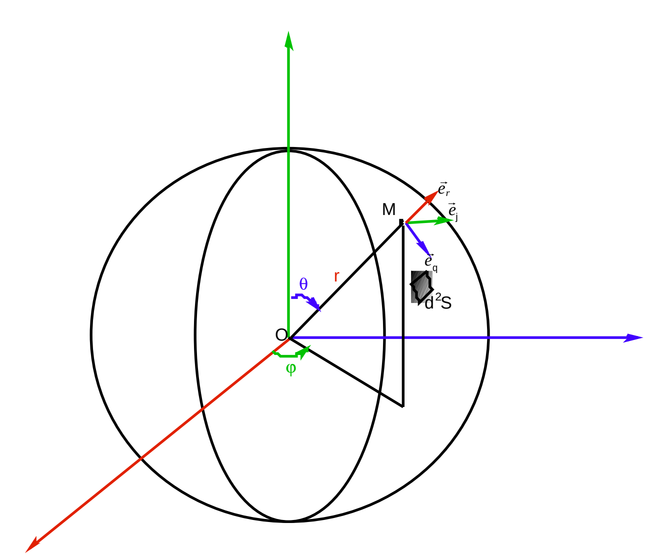
Le rayon de la sphère est constant et égal à R.

Chaque élément de surface est dans le plan défini par $(M, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ et vaut : $d^2S = r d\theta \cdot r\sin\theta d\varphi$
Il est important de noter que la surface complète de la sphère correspond à:

θ variant de 0 à π
et φ variant de 0 à 2π

$$S = \iint d^2S = R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \cdot d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$S = R^2 \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi} \cdot 2\pi \;= R^2 \cdot (1+1) \cdot 2\pi \;= 4\pi R^2$$



4.3 Exemples de calculs de volumes

4.3.1 Volume d'un cylindre

Le repère cylindrique s'impose naturellement.

Pour un cylindre de rayon R et de hauteur h on a un élément de volume $d^3\tau = \rho\, d\rho \cdot d\varphi \cdot dz$
Et un volume

$$\tau = \iiint d^3\tau = \int_0^R \rho\, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^h dz = \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi \cdot h = \pi R^2 h$$

4.3.2 Volume d'une sphère

Le repère sphérique s'impose naturellement.
Le rayon de la sphère est constant et égal à R.

L'élément de volume est $d^3\tau = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin\theta d\varphi$
Et un volume

$$\tau = \iiint d^3\tau = \int_0^R r^2 dr \cdot \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

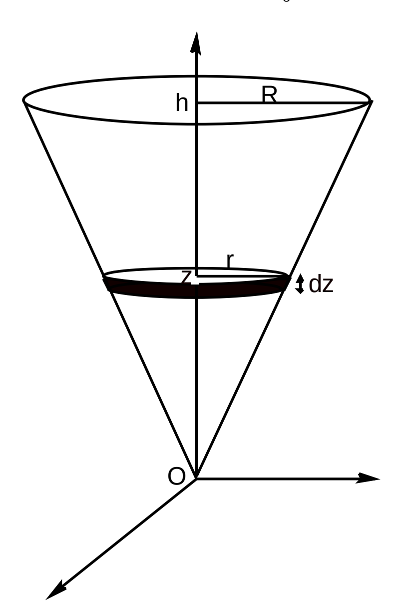
4.3.3 Volume d'un cône

Le repère cylindrique s'impose.
Pour un cône régulier de rayon R au sommet et de hauteur h.
On exprime l'élément de volume par $d^3\tau = \pi r^2 \cdot dz$ comme étant une superposition de disques de hauteur infinitésimale dz. En remarquant que r est fonction de z, on l'exprime grâce à la relation de Thales $\frac{r}{R} = \frac{z}{h}$ et ainsi

$$d^3\tau = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot z^2 dz$$

Et un volume

$$\tau = \iiint d^3\tau = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \int_0^h z^2 dz = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$



Annexe 5 Calculs de centres d'inertie

5.1 Définition du centre d'inertie

Le centre d'inertie C (ou centre de masse) est le barycentre des points du système pondéré par leur masse.
Il est nécessaire de le connaître pour localiser le point d'application du poids d'un corps et pour les mouvements de translation.

Si la ***distribution de masse est discrète*** on le calcule par $\vec{OC} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{OA_i}$ avec M la masse totale du système.

Si la ***distribution de masse est continue*** on le calcule par $\vec{OC} = \frac{1}{M}\iiint_\tau \rho \cdot \vec{OA} \cdot d^3\tau$ avec ρ la masse volumique.

On peut aussi écrire $M = \iiint_\tau \rho \cdot d^3\tau$ et donc $\vec{OC} = \dfrac{\iiint_\tau \rho \cdot \overline{OA} \cdot d^3\tau}{\iiint_\tau \rho \cdot d^3\tau}$

5.2 Propriétés du centre d'inertie

Associativité : Deux systèmes de centres et de masses respectifs C_1, C_2, m_1, m_2 ont pour centre de masse :

$$\vec{OC} = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 \vec{OC_1} + m_2 \vec{OC_2}\right)$$

Symétrie matérielle : Si un système possède un élément de symétrie matérielle qui vérifie pour tout point A :

$$\rho(A) = \rho(s(A))$$

Alors l'élément de symétrie contient le centre de masse.

5.3 Calculs de centres d'inertie

5.3.1 Centre d'inertie d'un cône plein régulier

Le cône est homogène de rayon R au sommet et de hauteur h

Le volume du cône est $\tau = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ (cf 1.4.4.3.3) et donc sa masse $M = \frac{1}{3}\pi R^2 h \cdot \rho$

La symétrie matérielle indique que le centre d'inertie appartient à l'axe Oz. Il suffit donc de calculer la coordonnée z_c du centre d'inertie selon :

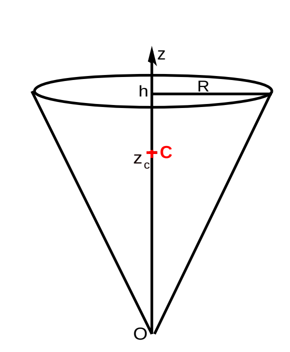
$$z_c = \frac{1}{M}\iiint_\tau \rho \cdot z \cdot d^3\tau \quad \text{avec} \quad d^3\tau = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot z^2 dz \quad \text{(cf 1.4.4.3.3)}$$

On obtient :

$$z_c = \frac{1}{\frac{1}{3}\pi R^2 h \cdot \rho}\int_0^h \rho \cdot z \cdot \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot z^2 dz$$

$$z_c = \frac{\frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \rho}{\frac{1}{3}\pi R^2 h \cdot \rho} \cdot \int_0^h z^3 dz = \frac{3}{h^3} \cdot \frac{h^4}{4}$$

$$\boxed{z_c = \frac{3}{4} \cdot h}$$



5.3.2 Centre d'inertie d'une demi sphère pleine

Le volume d'un demi sphère est $\tau = \frac{2}{3}\pi R^3$ (cf 1.4.4.3.2) et donc sa masse $M = \frac{2}{3}\pi R^3 \cdot \rho$

La symétrie matérielle indique que le centre d'inertie appartient à l'axe Oz. Il suffit donc de calculer la coordonnée z_c du centre d'inertie selon :

$$z_c = \frac{1}{M}\iiint_\tau \rho \cdot z \cdot d^3\tau$$

avec $d^3\tau = dr \cdot rd\theta \cdot r\sin\theta d\varphi$ (cf 1.4.4.3.2) et $z = r \cdot \cos\theta$

$$z_c = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3 \cdot \rho} \cdot \rho \cdot \int_0^R r^3 dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{\frac{2}{3}\pi R^3} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2\pi$$

$$\boxed{z_c = \frac{3}{8}R}$$

5.3.3 Centre d'inertie d'une demi sphère creuse

La symétrie matérielle indique que le centre d'inertie appartient à l'axe Oz. Il suffit donc de calculer la coordonnée z_c
Pour la demi sphère creuse le rayon est constant et égal à R, on peut faire le calcul sur des éléments de surface, et définir une densité massique de surface ρ_S :

$$z_c = \frac{1}{M}\iint_S \rho_S \cdot z \cdot d^2S \quad \text{avec} \quad M = \iint_S \rho_S \cdot d^2S$$

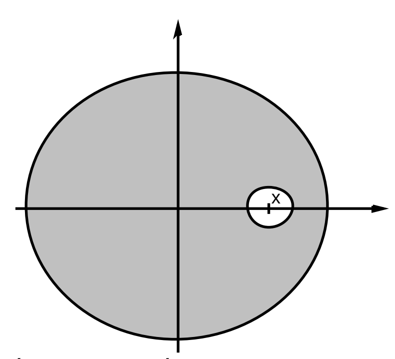
L'élément de surface est alors $d^2S = Rd\theta \cdot R\sin\theta d\varphi$ et on a $z = R \cdot \cos\theta$:

$$z_c = \frac{\iint_S \rho_S \cdot z \cdot d^2S}{\iint_S \rho_S \cdot d^2S} = \frac{\iint_S z \cdot d^2S}{\iint_S d^2S} = \frac{R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}{R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}$$

$$z_c = \frac{R^3 \cdot \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2\pi}{R^2 \cdot \left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2\pi}$$

$$\boxed{z_c = \frac{R}{2}}$$

5.3.4 Centre d'inertie d'un disque percé



Un disque de rayon R_1 est percé à l'abscisse x d'un trou circulaire de rayon R_2

L'axe Ox est axe de symétrie on calcule donc uniquement l'abscisse du centre de masse.

La masse du disque non percé vaut : $m_1 = \rho\pi R_1^2$

La masse évidée vaut : $m_2 = \rho\pi R_2^2$

La masse du disque percé vaut : $m = \rho\pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)$

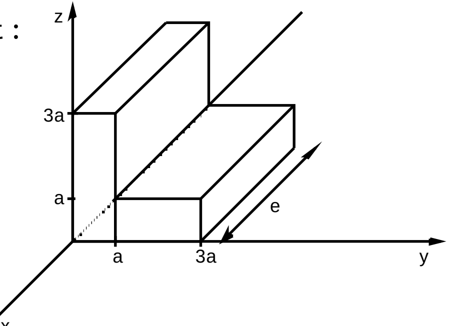
L'abscisse se calcule en utilisant la propriété d'associativité rappelée en 1.4.5.2
On notera que l'abscisse du cercle non percé est nulle et que la masse évidée est considérée comme négative dans le calcul.

$$x_c = \frac{1}{m}(m_1 \cdot 0 - m_2 \cdot x) \qquad x_c = -\frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}x \qquad \boxed{x_c = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}x}$$

5.3.5 Centre d'inertie d'un solide simple

Un solide est composé de deux parallélépipèdes rectangles de cotés a, 3a et e pour le premier et a, 2a et e pour le second.

Les coordonnées respectives des deux centres d'inertie des deux solides sont :

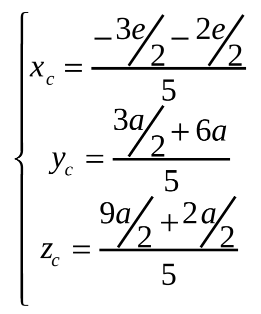


$$\begin{cases} x_{c_1} = -e/2 \\ y_{c_1} = a/2 \\ z_{c_1} = 3a/2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{c_2} = -e/2 \\ y_{c_2} = 2a \\ z_{c_2} = a/2 \end{cases}$$

Les masses respectives :

$m_1 = r \cdot 3a^2e$ et $m_2 = r \cdot 2a^2e$ et la masse totale $m = r \cdot 5a^2e$

d'où les coordonnées du centre d'inertie :



$$\begin{cases} x_c = \dfrac{-3e/2 - 2e/2}{5} \\ y_c = \dfrac{3a/2 + 6a}{5} \\ z_c = \dfrac{9a/2 + 2a/2}{5} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x_c = -e/2 \\ y_c = 3a/2 \\ z_c = 11a/10 \end{cases}}$$

Annexe.6 Les vecteurs

Vecteur libre : Vecteur défini uniquement par sa *direction* son *sens* et sa *valeur*, son point d'application pouvant être quelconque dans l'espace.

Vecteur glissant : Vecteur défini uniquement par sa *droite d'action* son *sens* et sa *valeur*, son point d'application pouvant être quelconque sur la droite d'action.

Vecteur lié : Vecteur défini par sa *droite d'action* son *sens*, sa *valeur* et son *point d'application*.

Moment en un point d'un vecteur lié : Le moment $\vec{M_O}$ en O d'un vecteur $\vec{V}$ de point d'application A vaut :

$$\vec{M_O} = \vec{OA} \wedge \vec{V}$$

Torseur : C'est l'ensemble constitué du moment et de son vecteur $\left[\vec{V}, \vec{M_O}\right]$.

Moment par rapport à un axe d'un vecteur lié : Le moment $\vec{M_\Delta}$ par rapport à l'axe • passant par O de vecteur unitaire $\vec{e_\Delta}$ d'un vecteur $\vec{V}$ de point d'application A vaut :

$$\vec{M_\Delta} = \vec{e_\Delta} \cdot \left(\vec{OA} \wedge \vec{V}\right)$$

Somme géométrique de vecteurs : La somme géométrique de vecteurs libres, glissant ou lié est un vecteur libre.

Résultante de vecteurs : C'est un cas particulier de somme géométrique de vecteurs glissant ou lié. Elle n'existe que si les vecteurs sont concourants au même point ou parallèles et de même sens. Si les vecteurs sont liés, la résultante est un vecteur lié, ainsi par exemple la résultante des vecteurs poids élémentaires est une vecteur poids dont le point d'application est le centre de gravité du solide considéré.

Produit scalaire : C'est le nombre réel $\left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$ qui est une grandeur intrinsèque (indépendante de la base de calcul). Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Produit vectoriel : C'est un vecteur libre $\vec{w}$ dont le sens est tel qu'il forme un trièdre $\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$ positif, dont la direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$, et de norme $\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$.
Le sens du vecteur dépend de l'orientation de l'espace choisi et défini par la règle de la main droite.

On a aussi avec $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$

Annexe 7 Les opérateurs

Ils permettent d'exprimer localement des relations intégrales.

7.1 Le gradient

Cet ***opérateur vectoriel*** agit sur un scalaire. Il est le vecteur normal à la surface de niveau (surface où V est constant) dirigé dans le sens des V croissants.

$$\vec{grad}V = \frac{dV}{dr}\vec{e_r}$$

En utilisant les notations vues en A.4.4.1 :

$$\vec{grad}\,V = \frac{1}{c_1}\cdot\frac{\partial V}{d_1}\cdot\vec{e_1} + \frac{1}{c_2}\cdot\frac{\partial V}{d_2}\cdot\vec{e_2} + \frac{1}{c_3}\cdot\frac{\partial V}{d_3}\cdot\vec{e_3}$$

Soit par exemple en coordonnées sphériques : $\begin{cases} \dfrac{\partial V}{dr} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{dq} \\ \dfrac{1}{r\sin q}\dfrac{\partial V}{dj} \end{cases}$

7.2 La divergence

Cet ***opérateur scalaire*** agit sur un vecteur. Cette valeur correspond au flux $f_{\vec{E}}$ du vecteur $\vec{E}$ sortant d'une unité de volume à travers une surface fermée.

$$div\vec{E} = \lim_{t\to 0}\frac{f_{\vec{E}}}{t}$$

En utilisant les notations vues en A.4.4.1 :

$$div\vec{E} = \frac{1}{c_1c_2c_3}\cdot\left[\frac{\partial(c_2c_3E_1)}{d_1} + \frac{\partial(c_1c_3E_2)}{d_2} + \frac{\partial(c_1c_2E_3)}{d_3}\right]$$

Soit par exemple en coordonnées cartésiennes : $div\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{dr} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_j}{dj} + \frac{\partial E_z}{dz}$

7.3 Le rotationnel

Cet ***opérateur vectoriel*** agit sur un vecteur. Ce vecteur est parallèle à la normale du plan pour lequel la circulation élémentaire $d\vec{E}$ est maximale.

$$\vec{rot}\vec{E} = \frac{d\overline{E}}{dS}\vec{e_n}$$

En utilisant les notations vues en A.4.4.1 :

$$\vec{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{e_1}}{c_2c_3} & \dfrac{\vec{e_2}}{c_1c_3} & \dfrac{\vec{e_3}}{c_1c_2} \\ \dfrac{\partial}{d_1} & \dfrac{\partial}{d_2} & \dfrac{\partial}{d_3} \\ c_1E_1 & c_2E_2 & c_3E_3 \end{vmatrix}$$

où $|\;|$ est la notation d'un déterminant.

Soit par exemple en coordonnées cartésiennes : $\vec{rot}\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} \end{cases}$

7.4 Relations entre opérateurs

$$\vec{rot}\ \vec{grad}\ V = \vec{0}$$

$$div\ \vec{rot}\ \vec{E} = 0$$

7.5 Relations intégrales

Soient • un volume limité par une surface S et une surface S limitée par une courbe fermée C.

Formule de Stokes : Circulation de E sur la courbe fermée C $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{rot}\vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d^2S$

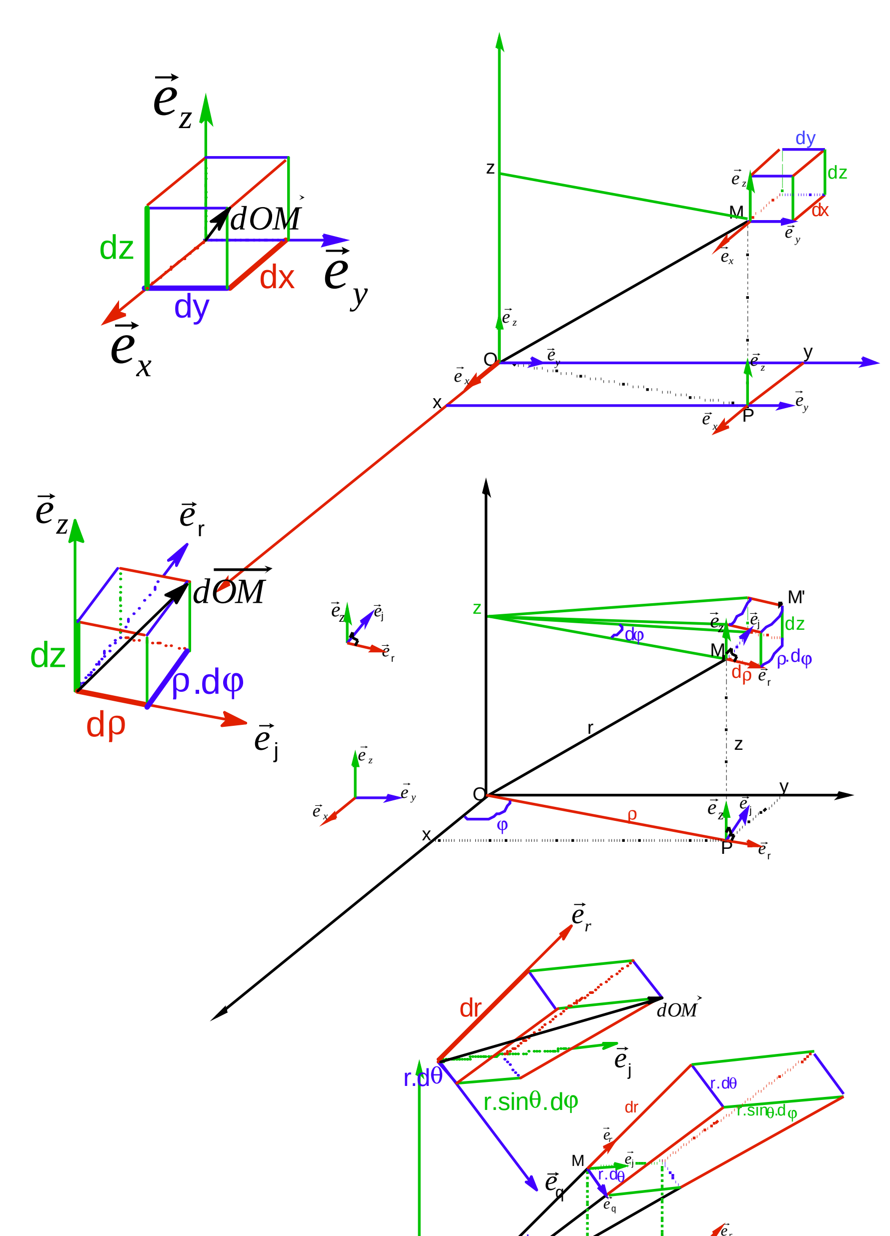
Formule d'Ostrogradsky : Flux de E à travers une surface fermée S $\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot d^2S = \iiint_t div\vec{E} \cdot d^3t$

Formule du rotationnel : $\oiint_S \vec{n} \wedge \vec{E} \cdot d^2S = \iiint_t \vec{rot}\vec{E} \cdot d^3t$

Formule du gradient : $\oiint_S V \cdot \vec{n} \cdot d^2S = \iiint_t \vec{grad}V \cdot d^3t$

Formule de Kelvin : $\oint_C V \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{grad}V \cdot \vec{n} \cdot d^2S$





CARTESIENNES

Déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{dOM} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$$

Volume élémentaire :

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{cart} \quad \overrightarrow{v_{M/R}}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{cart} \quad \overrightarrow{a_{M/R}}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{cart}$$

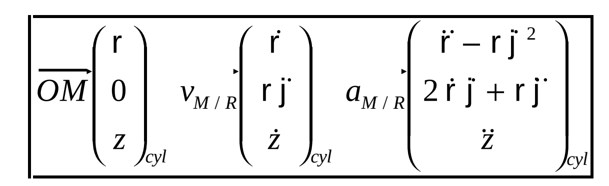
CYLINDRIQUES

Déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{dOM} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho\, d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{e}_z$$

Volume élémentaire :

$$dV = d\rho \cdot \rho \cdot d\varphi \cdot dz$$



$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix}_{cyl} \quad \vec{v}_{M/R}\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{cyl} \quad \vec{a}_{M/R}\begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{cyl}$$

SPHERIQUES

Déplacement élémentaire :

$$\overrightarrow{dOM} = dr \cdot \vec{e}_r + r\,d\theta \cdot \vec{e}_\theta + r\sin\theta\, d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

Volume élémentaire :

$$dV = dr \cdot r\,d\theta \cdot r\sin\theta\, d\varphi$$

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{spher} \quad \vec{v}_{M/R}\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r\dot{\varphi}\sin\theta \end{pmatrix}_{spher}$$

$$\vec{a}_{M/R}\begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta \\ 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta \end{pmatrix}_{spher}$$

CENTRE D'INERTIE :

$$\vec{OC} = \frac{1}{M}\iiint_\tau \rho \cdot \vec{OA} \cdot d^3\tau$$

MOMENT D'INERTIE :

$$I_\Delta = \iiint_\tau \rho_m \cdot HA^2 \cdot d^3\tau$$ et pour les solides à symétrie sphérique: $$I_{O\Delta} = \frac{2}{3} I_O$$

$$I_\Delta = I_{\Delta C} + M \cdot d^2$$

THEOREME FONDAMENTAL :

$$\frac{d[P]}{dt} = [F_{/O,ext}] \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \qquad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{M}_{F_{ext}/O}$$

ENERGIES :

$$d\xi_p = -dW \qquad \xi_c = \frac{1}{2}\left(\vec{p} \cdot \vec{v}_c + \vec{L}_c \cdot \vec{\omega}_{S/R}\right) \qquad \xi_c = \frac{1}{2} I_\Delta \cdot \dot{\varphi}^2 \quad \xi_{C/R} = \xi_{C/R_C} + \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2_{C/R}$$